

Dělitelnost

$n^5 - n$ dělitelné 5 pro $n \in \mathbb{N}$

1. Pro $n=1$ platí, že $1^5 - 1 = 0 = 5 \cdot 0$

2. Indukční krok od n k $n+1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= (n+1)((n+1)^4 - 1) = (n+1)((n+1)^2 - 1)((n+1)^2 + 1) = \\&= (n+1)(n^2 + 2n)(n^2 + 2n + 2) = (n+1)(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n^3 + 4n^2 + 4n) = \\&= n^5 + \underline{2n^4} + \underline{2n^3} + \underline{2n^4} + \underline{4n^3} + 4n^2 + \underline{n^4} + \underline{2n^3} + 2n^2 + \underline{2n^3} + 4n^2 + 4n = \\&= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n + n - n = \\&= \underbrace{n^5 - n}_{\text{Induk. předpoklad}} + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) \Rightarrow (n+1)^5 - (n+1) \text{ je násobkem} \\&\quad \text{pěti}\end{aligned}$$