

Kombinatorika a grafy – cvičení 1*

3. října 2022

Identity

Definice 1. Označme $\binom{n}{k}$ počet způsobů, jak z n prvkové množiny vybrat k prvků, tedy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Příklad 1. (úvodní) Dokažte

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Příklad 2. Dokažte

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Příklad 3. Dokažte

$$\binom{n+m+1}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k}.$$

Příklad 4. Dokažte

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Příklad 5. Dokažte

$$\binom{n}{r} r = n \binom{n-1}{r-1}.$$

Příklad 6. Dokažte

$$\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}.$$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/2122/KG1.html>.

Příklad 7. Dokažte

$$\sum_{k=d}^n \binom{n}{k} \binom{k}{d} = 2^{n-d} \binom{n}{d}.$$

Příklad 8. (Vandermondeova identita) Dokažte

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Příklad 9. Kolika způsoby můžeme rozdat n korun mezi k lidí tak, aby každý dostal alespoň jednu korunu?

Příklad 10. Jak se počet změní v případě, že netrváme na tom, aby každý něco dostal?

Stromy

Strom je souvislý graf bez cyklů. Ekvivalentní definice jsou:

1. graf, kde každé vrcholy lze spojit jednoznačně určenou cestou,
2. souvislý graf, který přestane být souvislý po odebrání libovolné hrany,
3. graf bez cyklů, kde po přidání libovolné nové hrany už cyklus vznikne,
4. souvislý graf s počtem hran o jedna menším než je počet vrcholů.

Nesouvislý graf, jehož každá komponenta souvislosti je stromem, se nazývá les. *Kostrou* souvislého grafu G označuje podgraf grafu G , který obsahuje všechny vrcholy G a který je zároveň stromem.

Příklad 11. Kolik je všech stromů s vrcholy $\{1, 2, 3, 4\}$? Nakreslete všechny neizomorfní stromy na 6 vrcholech.

Příklad 12. Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.

Příklad 13. Ukažte, že graf na n vrcholech s k komponentami souvislosti je lesem právě tehdy, když má $n - k$ hran.

Příklad 14. Dokažte, že graf $G = (V, E)$ je stromem (vemte si jednu z ostatních definic) právě tehdy, když neobsahuje kružnici a $|E| = |V| - 1$.

Příklad 15. Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik minimálně a maximálně může mít listů.

Příklad 16. Spočítejte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$.

Návody k příkladům

1. Mějme n kuliček a počítejme, kolika způsoby lze vybrat k kuliček. Buď jich vybereme k , nebo jich nevybereme $n - k$.
2. Vybíráme $k + 1$ kuliček z $n + 1$ kuliček. První buďto vybereme, nebo ne.
3. Použijte podobnou ideu jako v předchozím příkladě, ale induktivně.
4. Vybíráte podmnožiny n -prvkové množiny. Každý prvek buďto vyberete, nebo ne.
5. Jsou dva postupy, jak z n fotbalistů vybrat r hrajících hráčů a jednoho kapitána.
Dvě možnosti: buď nejprve vybereme z n hráčů r hrajících a pak kapitána, nebo nejprve vybereme kapitána a potom zbytek týmu ze zbylých $r - 1$ hráčů.
6. První způsob: nejprve vybereme z n hráčů r hrajících a z nich k útočníků.
Druhý způsob: nejprve vybereme k útočníků a potom dobereme zbytek týmu ze zbylých $r - k$ hráčů.
7. Můžeme si to představit tak, že si z n lidí vybíráme $k \geq d$ kamarádů a s d z nich chceme vybrat na fotbal.
Počítejme dvěma způsoby: buď nejprve vybereme k kamarádů a potom d -členný tým na fotbal, nebo naopak nejprve vybereme tým a pak nějak dobereme zbytek kamarádů.
8. Máte n děvčat a m hochů a chcete z nich vytvořit k -členný tým.
9. Představme si, že máme posloupnost n mincí, mezi nimiž je $n - 1$ mezer a my chceme vybrat $k - 1$ mezer, čímž se mince rozdělí mezi k lidí.
10. První přidejme k virtuálních mincí, potom aplikujme předchozí metodu a virtuální mince následně odstraňte.
11. Na čtyřech vrcholech jich je 16.
12. Zkuste pro spor předpokládat, že maximální strom (co do inkluze) neobsahuje všechny vrcholy a vezměte si cestu (díky souvislosti) z nějakého vrcholu v tomto maximálním stromě do vrcholu mimo tohoto stromu.
13. Implikace zleva doprava plyne z poslední definice stromovosti. Opačná implikace vyžaduje dolní odhad na počet hran souvislé komponenty a využití toho, že nastane všude rovnost.
14. Uvědomte si, že minimální počet hran na souvislost grafu je $|V| - 1$ (indukcí, hladově). Proto, když si vezmeme 4. definici stromovosti nahoře, ta potom implikuje, že strom nemůže obsahovat kružnice, protože máme minimální počet hran na to, aby byl tento graf souvislý. Správný počet hran už máme zadarmo.
Opačná implikace je velmi podobná. Pokud neobsahuje kružnice, tak při hladové konstrukci vždy připojíme nový vrchol, takže bude i souvislý.
15. Uvědomte si, kolik hran takový strom má. Jak teda musí vypadat stupně vrcholů?
16. Uvědomte si, že partita s dvěma vrcholy může mít pouze jednoho společného souseda. Taký každý vrchol z druhé partity musí mít souseda v partitě velikosti 2. Výsledek je $n2^{n-1}$.