

Kombinatorika a grafy I — 5. cvičení*

8. listopadu 2022

1 Vytvořující funkce potřetí a naposledy

Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$.

Příklad 1. Vyjádřete členy a_n , které jsou zadány následujícími rekurencemi (né nutně vytvořujícími funkcemi).

(a) $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ pro každé $n \geq 0$, přičemž $a_0 = 1$ a $a_1 = 2$,

(b) $a_n = \frac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n}$ pro každé $n \geq 2$, přičemž $a_0 = 1$ a $a_1 = 2$,

(c) $a_{n+2} = \sqrt{a_n a_{n+1}}$ pro každé $n \geq 0$, přičemž $a_0 = 2$ a $a_1 = 4$.

řešení. (a) Pokud rovnici vynásobíme členem x^n a všechny vzniklé rovnice sečteme přes možná n , tak dostaneme pro funkci $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rovnici

$$\frac{a(x) - 1 - 2x}{x^2} = \frac{a(x) - 1}{2x} - \frac{a(x)}{2}.$$

to se dá přepsat a upravit na

$$a(x) = \frac{2 + 3x}{2 - x - x^2} = \frac{2 + 3x}{(1-x)(2+x)} = \frac{5/3}{1-x} - \frac{1/3}{(2+x)} = \frac{5/3}{1-x} - \frac{2/3}{(1+x/2)}.$$

Z $\frac{1}{1-x} \sim (1, 1, 1, \dots)$ se dostaneme dosazením $-x/2$ za x na $\frac{1}{1+2x}$. Součtem a násobením konstantou pak máme

$$a_n = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) Stačí nahlédnout, že $(a_0, a_1, \dots) = (1, 2, 3/2, 3/2, 3/2, \dots)$. To se dá dokázat indukcí. Platí $a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{1+2}{2} = 3/2$. Pro indukční krok uvažme $n \geq 3$ a předpokládejme, že $a_i = 3/2$ pro každé i s $2 \leq i < n$. Potom $a_n = \frac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n} = \frac{1+2+3/2+\dots+3/2}{n} = \frac{3n/2}{n} = 3/2$. Klasický recept fungovat nebude, protože řád rekurence není omezený. Existují metody pro řešení takových rekurencí (viz „solutions of linear difference equations with variable coefficients“).

(c) Stačí si všimnout, že pro $a_n = 2^{b_n}$, kde $(b_0, b_1, \dots)$ je posloupnost z první části. Takže podle řešení první části platí $b_n = \log a_n = \log(5/3 - 2(-1/2)^n/3)$.

□

Příklad 2. Mějme dvě vytvořující funkce $a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a $b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$, kde $a_0 = 0$. Uvažme funkci $c(x) = b(a(x))$ vzniklou složením $a(x)$ a $b(x)$.

(a) Napište vzorec pro koeficienty c_n funkce $c(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$. Proč trváme na předpokladu $a_0 = 0$?

(b) Nechť $c_0 = 1$ a nechť pro $n \in \mathbb{N}$ značí koeficient c_n počet uspořádaných rozkladů čísla n na kladné sčítance. Vyjádřete funkci $c(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ jako složení dvou vhodných funkcí.

řešení. (a) Složíme-li dvě vytvořující funkce $a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a $b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ do funkce $b(a(x))$, tak, je-li $a(0) = 0$, $c(x) = b(a(x))$ má u x^n , $n > 0$, koeficient

$$c_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{N}^k: j_1 + \dots + j_k = n} b_k a_{j_1} \cdots a_{j_k}.$$

Platí $c_0 = b_0$. To proto, že

$$c(x) = b_0 + b_1(a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + b_2(a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^2 + \dots$$

Koeficient f_0 musí být pro skládání nulový, jinak c_n nezávisí na konečném počtu členů $a(x)$ a $b(x)$.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>

(b) Stačí vzít $a(x) = \frac{x}{1-x}$ a $b(x) = \frac{1}{1-x}$, protože pak

$$c_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{N}^k: j_1 + \dots + j_k = n} b_k a_{j_1} \cdots a_{j_k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{N}^k: j_1 + \dots + j_k = n} 1$$

pro $n \in \mathbb{N}$ a $c_0 = 1$. Tedy dostaneme

$$c(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-2x}.$$

To odpovídá posloupnosti $(1, 1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}, \dots)$ a souhlasí s pozorováním $c_n = 2^{n-1}$. $\square$

Příklad 3 (*). Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n , stejná jako pravděpodobnost, že n padne na dvou standardních šestistěnných hracích kostkách?

řešení. Kostka odpovídá tažení náhodných čísel z jisté množiny, například u standardní kostky je tato množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Označme jako A standardní kostku a necht a_n je počet způsobů, jak na ní můžeme hodit číslo n . Tedy pro A máme vytvářející funkci $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Analogicky pro kostky B a C máme vytvářející funkce $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ a $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Pro standardní kostku je tedy $a(x)$ vytvářející funkci pro posloupnost $(0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots)$, neboli $a(x) = x + \dots + x^6$. Pokud d_n označuje počet způsobů kolika může dohromady na kostkách B a C padnout číslo n , pak $d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = b(x)c(x)$, protože d_n je počet způsobů, kolika lze hodit k na B krát počet způsobů, kolika lze hodit $n-k$ na C , sečteno přes všechna k . Neboli $d_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k c_{n-k}$, což je přesně definice koeficientů součinu $b(x)c(x)$. Stejně tak počet způsobů, kolika jde hodit n na dvou standardních kostkách je koeficient u n -tého členu $a(x)a(x)$.

Takže náš úkol je najít posloupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ takové, že platí

$$b(x)c(x) = a(x)a(x) = (x + \dots + x^6)^2.$$

Jinak řečeno, chceme najít polynomy $b(x)$ a $c(x)$ s kladnými celočíselnými koeficienty takové, že $b(0) = c(0) = 0$ (bez nulových stěn), $b(1) = c(1) = 6$ (mají šest stěn), $b(x)c(x) = (x + \dots + x^6)^2$ a $b(x), c(x) \neq x + \dots + x^6$.

Polynom $(x + \dots + x^6)^2$ se dá přepsat na ireducibilní rozklad

$$x^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2.$$

Ty se pokusíme nyní rozdělit na součin dvou polynomů odpovídajícím nestandardním šestistěnným kostkám. Je-li $x = 1$, tak $x+1 = 2$, $x^2+x+1 = 3$, $x^2-x+1 = 1$. Takže každá z kostek B a C musí mít po jedné kopii $x+1$ a x^2+x+1 , aby vyšlo šest stěn. Stejně tak, abychom se zbavili konstantních členů, musí mít každý po jedné kopii x . Takže nám vyjde jediná možnost, jak zvolit kostky nestandardně:

$$b(x) = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2 = x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x$$

a

$$c(x) = x(x+1)(x^2+x+1) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x.$$

Takže máme kostky se stěnami $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ a $\{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$.

Pokud bychom povolili stěny s nulovou hodnotou, tak se postup téměř nezmění. Jen můžeme vypustit podmínku na dosažení nuly v polynomech $b(x)$ a $c(x)$ a dostaneme navíc třeba kostky $\{0, 1, 1, 2, 2, 3\}$ a $\{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$ nebo triviálně $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Podobně triviálně můžeme dostat nekonečně mnoho nestandardních kostek, pokud povolíme záporné stěny. $\square$

Příklad 4. S pomocí vytvářejících funkcí sečtěte následující řady.

(a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2,$

(b) $\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}.$

řešení. (a) Mějme $a_k = \binom{n}{k}$ a uvažme vytvářející funkci $a(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Potom pro $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = a(x)a(x)$ je podle operace násobení $c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$, čili c_n je naše suma. Máme $a(x) = (1+x)^n$ podle binomické věty. Takže $c(x) = (1+x)^{2n}$ a podle binomické věty je $c_n = \binom{2n}{n}$, protože $c(x) = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$.

- (b) Mějme $a_k = \binom{n}{k}$ a uvažme vytvořující funkci $a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Máme $a(x) = (1+x)^n$ podle binomické věty. Podle operace derivace je pak $a'(x) = n(1+x)^{n-1}$ vytvořující funkcí pro posloupnost s k -tým členem $(k+1)a_{k+1}$ pro $k = 0, 1, \dots$. Jedná se o polynom a tedy $a'(1)$ je definováno a rovná se naší sumě, protože její člen pro $k = 0$ je nulový. Na druhou stranu $a'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$ a tedy suma se rovná $n2^{n-1}$. □

Nechť $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$.

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$
$x^k a(x)$	$(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \dots - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, i a_i, \dots)$
$\int_0^x a(t) dt$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$