

Kombinatorika a grafy I — 8. cvičení*

29. listopadu 2022

1 Grafová souvislost

Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* v grafu G je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ grafu G je velikost nejmenšího hranového řezu v G a 1, pokud $G \cong K_1$. *Vrcholová souvislost* $k_v(G)$ grafu G definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf K_n s $n \geq 2$, jako 1 pro $G \cong K_1$ a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu v G jinak. Graf G je *hranově t -souvislý* pro $t \in \mathbb{N}_0$, pokud platí $k_e(G) \geq t$ a *vrcholově t -souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq t$.

Z přednášky víme, že odebráním hrany vrcholová ani hranová souvislost nevzroste a klesne nanejvýš o jedna.

Příklad 1. Najděte příklad grafu G , ve kterém lze odebrat vrchol tak, že

- (a) hranová souvislost G klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.
- (b) vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?

Řešení. (a) Pro pokles stačí uvážit pro předem dané číslo n dvě disjunktní kopie kliky K_{n+1} a vrchol v , který je napojen na všechny ostatní vrcholy. Potom před odebráním v má graf hranovou souvislost n , protože libovolný hranový řez k oddělení vrcholu od kliky potřebuje n hran a k oddělení vrcholu v jich je potřeba aspoň $n + 1$. Na druhou stranu po odebrání v je graf nesouvislý a jeho hranová souvislost je tak nulová.

Například pro dané číslo n stačí pro vzrůst hranové souvislosti uvážit K_{n+2} s přidaným vrcholem v , který je na kliku napojen jednou hranou. Potom po odebrání v má graf z definice hranovou souvislost $n + 1$, zatímco před odebráním měl hranovou souvislost jedna.

- (b) Například pro dané číslo n stačí pro vzrůst vrcholové souvislosti uvážit K_{n+2} s přidaným vrcholem v , který je na kliku napojen jednou hranou. Potom po odebrání v má graf z definice vrcholovou souvislost $n + 1$, zatímco před odebráním měl vrcholovou souvislost jedna.

Po odebrání libovolného vrcholu nemůže vrcholová souvislost klesnout o víc jak jedničku, protože jinak by $G - v$ měl vrcholovou souvislost nanejvýš $k_v(G) - 2$ a to by dosvědčoval nějaký vrcholový řez R (není-li $G - v$ úplný. Je-li úplný, pak triviálně vrcholová souvislost G nemůže klesnout o víc jak jedničku.) této velikosti. Potom ale $R \cup \{v\}$ je vrcholový řez v G velikosti nanejvýš $k_v(G) - 1$, což je spor.

□

Příklad 2. Rozhodněte, zda je každý souvislý graf se sudými stupni a s neprázdnou množinou hran

- (a) vrcholově 2-souvislý,
- (b) hranově 2-souvislý.

Řešení. (a) Ne, například motýl, což jsou dva trojúhelníky sdílející právě jeden vrchol. Tento graf je vrcholově 1-souvislý, ale má stupně jen 4 a 2.

- (b) Ano, uvažme, že graf má most. Potom po jeho odebrání dostaneme dvě komponenty souvislosti, kde v každé je lichý součet stupňů, což nelze z principu sudosti.

□

Příklad 3. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetězců délky k . Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k -krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetězky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>

Řešení. Vrcholová souvislost Q_k je nanejvýš hodnota minimálního stupně, což je k , protože daný graf je k -regulární a po odebrání všech sousedů nějakého vrcholu aspoň jeden vrchol zbyde, je-li $k > 1$. Opačnou nerovnost ukážeme indukcí podle k . Rozdělme Q_k na disjunktní podgrafy $G_0[\{0u \mid u \in \mathbb{B}^{k-1}\}]$ a $G_1[\{1u \mid u \in \mathbb{B}^{k-1}\}]$, které jsou isomorfní s Q_{k-1} . Graf Q_k můžeme zpátky dostat jejich sjednocením a přidáním 2^{k-1} hran $\{0u, 1u\}$ pro každé $u \in \mathbb{B}^{k-1}$.

Nechť S je vrcholový řez Q_k velikosti menší než k . Kdyby oba grafy $G_0 - S$ i $G_1 - S$ byly souvislé, tak by i $Q_k - S$ musel být souvislý, protože jedna hrana $\{0u, 1u\}$ musí zůstat v $Q_k - S$. Takže BÚNO $G_0 - S$ je nesouvislý. Z indukčního předpokladu $k_v(Q_{k-1}) = k - 1$, tedy S musí obsahovat alespoň $k - 1$ vrcholů G_0 . Protože v S nemůže být žádný vrchol z G_1 , tak $G_1 - S$ je souvislý a hrany $\{0u, 1u\}$ dosvědčují souvislost Q_k , což je spor s tím, že S je vrcholový řez.

Hranová souvislost k -krychle je také k , protože je zdola omezená vrcholovou souvislostí a stačí odebrat k hran u libovolného vrcholu. $\square$

Příklad 4. Graf je k -regulární, má-li všechny stupně rovné k .

(a) (*) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k -regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.

(b) Je pro $k \geq 2$ každý k -regulární (ne nutně bipartitní) souvislý graf vrcholově 2-souvislý?

(c) Co když v příkladu nahradíme vrcholovou souvislost hranovou?

Řešení. (a) Sporem, nechť $G = (A \cup B, E)$ není vrcholově 2-souvislý. Potom existuje vrchol x , po jehož odebrání se graf rozpadne na komponenty souvislosti $G_1, \dots, G_m$, kde $m \geq 2$. BÚNO $x \in A$. Potom existuje komponenta G_b s aspoň o jedna víc vrcholem v B než v A (to proto, že obě partity jsou z regulárnosti stejně velké). Označme $L = G_b \cap A$ a $R = G_b \cap B$. Nanejvýš $k - 1$ vrcholů z R bylo napojen na x a nyní mají tak stupeň menší než k . Žádnému vrcholu v L se stupeň smazáním x nesnížil. Takže platí

$$\sum_{u \in R} \deg_{G_b}(u) \geq k \cdot |R| - (k - 1) > k \cdot |L| = \sum_{v \in L} \deg_{G_b}(v).$$

Ale protože je G_b bipartitní, tak musí platit $\sum_{u \in R} \deg_{G_b}(u) = \sum_{v \in L} \deg_{G_b}(v)$ a máme spor.

Neplatí, že každý k -regulární bipartitní graf je Hamiltonovský. Existuje tzv. „Horton graph“, který dané tvrzení vyvrací.

(b) Je-li $k = 2$, pak máme sjednocení cyklů, které, je-li graf souvislý, je hamiltonovským cyklem a tedy bipartitní a tvrzení stále platí z první části. Pro $k \geq 3$ už jde ale bez bipartitnosti najít protipříklad, třeba pro k sudé stačí uvážit $k/2$ kopií K_{k+1} bez jedné hrany, kde vrcholy sousedící s vynechanou hranou jsou všechny napojeny na nový vrchol v . Po odebrání v se graf rozpadne na jednotlivé komponenty, takže má vrcholovou souvislost jedna.

Pro k liché se dá uvážit analogická konstrukce, jen se dvěma pomocnými vrcholy. Máme k klik K_{k+1} s vynechanou hranou a dva pomocné vrcholy u a v . Potom vezmeme $(k - 1)/2$ klik a u každé napojíme vrcholy sousedící s vynechanou hranou na u . totéž uděláme pro druhou skupinu $(k - 1)/2$ klik a vrchol v . Zbyde jedna nenapojená klika, kde jeden její vrchol sousedící s vynechanou hranou napojíme na u a druhý na v . Vzniklý graf je k -regulární a po vynechání pomocného vrcholu od zbytku grafu odřízneme aspoň jednu kliku s vynechanou hranou.

(c) Pro hranovou souvislost platí tvrzení s předpokladem bipartitnosti, protože hranová souvislost je aspoň tak velká jako ta vrcholová. Bez bipartitnosti se z principu sudosti dá ukázat, že tvrzení platí pro sudá k . Kdyby v grafu, jehož všechny vrcholy jsou sudé, existoval most, pak by v obou vzniklých komponentách vyšel lichý součet stupňů, což není možné z principu sudosti. Pro k liché se dá najít protipříklad, stejný jako výše. $\square$