

Kombinatorika a grafy I — 8 cvičení*

22. listopadu 2022

1 Aplikace Hallovy věty

Vrcholovým pokrytím v grafu $G = (V, E)$ je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každé $e \in E$ platí $e \cap C \neq \emptyset$. *Párováním* v G je množina disjunktních hran z E .

Kőnigova–Egerváryho věta. V každém bipartitním grafu se velikost minimálního vrcholového pokrytí rovná velikosti maximálního párování.

Nech X a I jsou konečné množiny. *Množinovým systémem* na X nazveme $|I|$ -tici $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f : I \rightarrow X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v *incidenčním grafu* $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\} : i \in I, x \in X, x \in M_i\})$.

Hallova věta. Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $|\bigcup_{j \in J} M_j| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá *Hallova*.

Příklad 1. Nech a, b, c, d, e jsou různá přirozená čísla.

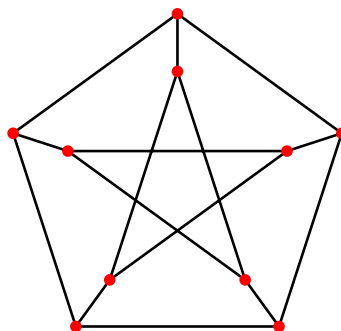
- (a) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $X = \{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů?
- (b) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $X = \{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů?

Řešení. (a) Máme množiny $X = \{a, b, c, d\}$ a $I = \{1, 2, 3, 4\}$, kde $|I| = \binom{4}{3} = 4$. Dostaneme systém $\mathcal{M} = (M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{a, b, d\}, M_3 = \{a, c, d\}, M_4 = \{b, c, d\})$. Potom stačí uvážit systém různých reprezentantů $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$ a $f(4) = d$. Tedy například a je reprezentantem množiny $M_1 = \{a, b, c\}$.

- (b) Máme množiny $X = \{a, b, c, d, e\}$ a $I = \{1, 2, \dots, 10\}$, kde $|I| = \binom{5}{3} = 10$. Dostaneme systém $\mathcal{M} = (M_1 = \{a, b, c\}, M_2 = \{a, b, d\}, M_3 = \{a, b, e\}, M_4 = \{a, c, d\}, \dots, M_{10} = \{c, d, e\})$. Musíme umístit deset prvků tak, aby každý byl v sobě přiřazené množině, což nelze, protože $|I| = 10 > 5 = |X|$ a tedy nemůže existovat prosté zobrazení $f : I \rightarrow X$.

□

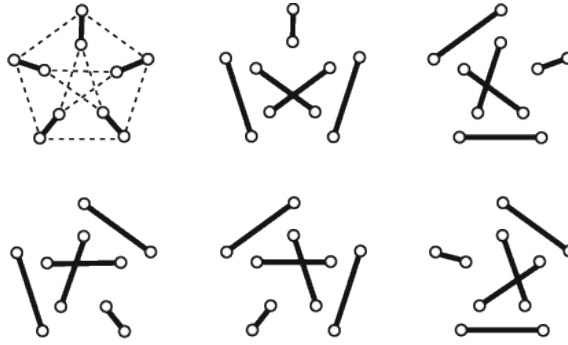
Příklad 2. Perfektní párování grafu G je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu G . Najděte všechna perfektní párování v Petersonově grafu. Ukažte, že víc jich neexistuje.



Řešení. Máme těchto šest. Ve vnitřním i vnějším cyklu můžeme použít nanejvýš dvě hrany, ale v perfektním párování potřebujeme hran pět, protože graf má deset vrcholů. Tedy musíme použít alespoň jednu z krátkých hran mezi cykly. Použití jedné zakáže použití incidentních hran, to jsou dvě ve vnitřním i vnějším cyklu. Nepoužijeme-li další krátkou hranu, je zbytek párování určen. Použijeme-li alespoň jednu další krátkou hranu, a zároveň né všechny, tak dostaneme párování velikosti nanejvýš 4, tedy musíme použít jen krátké hrany. To dá šesté perfektní párování.

□

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>



Příklad 3. Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu.

Řešení. Jistě je velikost minimálního vrcholového pokrytí aspoň tak velká, jako je velikost maximálního párování, protože každou hranu párování je třeba pokrýt a z disjunktnosti hran párování je potřeba aspoň jeden vrchol na každou z nich.

Zbývá ukázat, že velikost minimálního vrcholového pokrytí je v bipartitním grafu $G = (A \cup B, E)$ nanejvýš tak velká, jako je velikost maximálního párování. Nechť C je minimální vrcholové pokrytí v G . Protože C je vrcholové pokrytí, tak nemáme žádné hrany mezi $A \setminus C$ a $B \setminus C$. Uvažme (disjunktní) podgrafy H_1 a H_2 tvořené hranami mezi $A \cap C$ a $B \setminus C$ a hranami mezi $A \setminus C$ a $B \cap C$. Ukážeme, že H_1 má párování velikosti $|A \cap C|$ a že H_2 má párování velikosti $|B \cap C|$, čímž dohromady dostaneme párování v G velikosti $|C|$ a budeme hotovi.

Ze symetrie stačí tvrzení dokázat pro graf H_1 . Ověříme Hallovu podmínku pro systém $\mathcal{M} = (M_i : i \in I = A \cap C)$, kde $M_i \subseteq X = B \setminus C$ je množina sousedů vrcholu i v grafu H_1 . Potom $H_1 = G_{\mathcal{M}}$ a SRR pro $\mathcal{M}$ je totéž jako párování v $H_1 = G_{\mathcal{M}}$ velikosti $|I| = |A \cap C|$. Tedy, pokud platí Hallova podmínka, tak dané párování dostaneme podle Hallovy věty. Mějme podmnožinu $J \subseteq I = A \cap C$. Všimněme si, že $\cup_{j \in J} M_j$ je množina vrcholů, kteří jsou sousedy aspoň jednoho vrcholu z J v H_1 . Pokud je $|J| > |\cup_{j \in J} M_j|$, pak lze nahradit J za $\cup_{j \in J} M_j$ v C a získat tak vrcholové pokrytí $(C \setminus J) \cup (\cup_{j \in J} M_j)$ menší velikosti než $|C|$, což nelze z minimality C . Tedy $|J| \leq |\cup_{j \in J} M_j|$, a Hallova podmínka platí a dostáváme požadované párování. $\square$

Příklad 4. Latinský obdélník řádu $k \times n$, $k \leq n$ je matice typu $\{1, \dots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou. Latinský čtverec řádu n je latinský obdélník řádu $n \times n$.

Ukažte, že latinských čtverců řádu n je alespoň $\Omega((n!)^2)$.

Řešení. V Latinském obdélníku $2 \times n$ je druhý řádek permutací prvního bez pevných bodů. Podle šatnářky je takových permutací zhruba $n!/e$ a první řádek jde vybrat $n!$ způsoby. Podle předešlé části jde každý takový obdélník doplnit na čtverec, z čehož máme zbytek.

Je známo, že počet latinských čtverců řádu n je aspoň $\prod_{k=1}^n (k!)^{n/k}$ a nanejvýš $(n!)^{2n}/n^{n^2}$, čili $2^{\Omega(n^2 \log n)}$. $\square$

Příklad 5. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k -tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.

Řešení. Vezměme $X = \mathbb{N}$ a $I = \mathbb{N}$. A uvažme množiny $M_i = \{i-1\}$ pro každé $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $M_1 = \mathbb{N}$. Potom Hallova podmínka platí, protože každá k -tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků (nenulové prvky přidají do sjednocení o jedna menší prvky, jednička přidá veškerá přirozená čísla). Bohužel ale nenajdeme systém různých reprezentantů (párování), protože všechny vrcholy mimo jedničky mají stupeň jedna a tedy jednička nebude v párování použita.

S axiomem výběru se dá dokázat, že s konečnými M_i platí Hallova věta i pro nespočetné X a I . $\square$

Příklad 6 (*). Pro $n \times n$ matici $A = (a_{ij})$ definujeme permanent matice A jako

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

(a) Buď G bipartitní graf s partitami $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ a $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a nechť $a_{ij} = 1$, pokud $\{u_i, v_j\} \in E(G)$ a $a_{ij} = 0$ jinak. Ukažte, že počet perfektních párování v G je $\text{per}(A)$, kde $A = (a_{ij})$.

- (b) Nech $A = (a_{ij})$ je nezáporná $n \times n$ matice, ve které se všechny řádkové a sloupcové součty rovnají jedné (tzv. dvojité stochastická matice). Ukažte, že $\text{per}(A) > 0$.

Řešení. (a) Nech $a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi(n)}$ je člen v sumě permanentu. Potom počet 1-faktorů, které obsahují hrany $\{u_1, v_{\pi(1)}\}, \{u_2, v_{\pi(2)}\}, \dots, \{u_n, v_{\pi(n)}\}$ je přesně $a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi(n)}$, protože můžeme vybrat hranu $\{u_1, v_{\pi(1)}\}, \{u_2, v_{\pi(2)}\}$ atd. nezávisle. Protože π je permutace, tak se v žádném vrcholu nesejdou dvě vybrané hrany. Také je vidět, že dvě perfektní párování jsou různá právě tehdy, když se výběrové permutace liší. Pokud sčítáme přes všechny permutace, tak uvažujeme všechny možnosti.

- (b) Uvažme graf $G = (V, E)$ na množině vrcholů $V = A \cup B = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$, kde $\{u_i, v_j\} \in E$, pokud $a_{ij} > 0$. Chceme ukázat, že G má vždy 1-faktor. Sporem, nech ho nemá. Potom podle Hallovy věty existuje $X \subseteq A$, pro kterou platí $|X| > |N(X)|$. Nech je $X = \{u_1, \dots, u_k\}$ a nech $B \setminus N(X) = \{v_1, \dots, v_l\}$. Potom $k + l > n$, protože odečítáme-li od velikosti B , což je n , $|N(X)|$, což menší číslo než k , tak dostaneme l . Také $a_{ij} = 0$ pro $1 \leq i \leq k$ a $1 \leq j \leq l$, protože z X do $B \setminus N(X)$ nevede hrana.

Máme $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$, protože A je dvojité stochastická, takže $\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n a_{ij} = l$. Na druhou stranu

$$\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^l a_{ij} \leq \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = n - k,$$

kde první rovnost je z toho, že $a_{ij} = 0$ pro $1 \leq i \leq k$ a $1 \leq j \leq l$. Nerovnost je pak triviální a druhá rovnost platí kvůli dvojité stochastičnosti. To už dává spor s $k + l > n$. □