

① Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^5 - n$ dělitelné 5 beze zbytku

$$A(n): 5 \mid n^5 - n \Rightarrow n^5 - n = 5m$$

1) základní krok:

$$n=1 \quad 1^5 - 1 = 0 \quad 5 \text{ dělí nulu } 0 \mid 5 \Rightarrow \text{platí } A(1)$$

2) indukční krok:

$$\text{pro } n \geq 2 \quad A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

$$A(n+1): (n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 =$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n =$$

$$= \underbrace{(n^5 - n)}_{5 \mid n^5 - n} + \underbrace{5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)}_{5 \mid 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)} \quad \text{QED}$$

$5 \mid n^5 - n$
máme z předpokladu

$5 \mid 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$
platí

$$\Rightarrow \text{platí } A(n+1)$$

$$\Rightarrow A(n) \Rightarrow A(n+1)$$