Kombinatorika a grafy I — 4. cvičení*

24. října 2022

1 Vytvořující funkce - parciální zlomky

Tvrzení (Rozklad na parciální zlomky). *Uvažujme podíl polynomů* $\frac{p(x)}{q(x)}$*, kde búno (jinak to můžeme snadno částečně vydělit) q má vyšší stupeň než p a má rozklad*
$q(x) = (x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_N)^{n_N} (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{m_1} \dots (x^2+\alpha_M x+\beta_M)^{m_M}$.

Pak můžeme zmíněný podíl rozložit na součet tzv. parciálních zlomků*, kde za každý člen* $(x-a_i)^{n_i}$ *v rozkladu q budou členy* $\frac{A_{i,1}}{x-a_i} + \dots + \frac{A_{i,n_i}}{(x-a_i)^{n_i}}$ *a za každý člen* $(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^{m_i}$ *budou členy* $\frac{B_{i,1}x+C_{i,1}}{x^2+\alpha_i x+\beta_i} + \dots + \frac{B_{i,m_i}x+C_{i,m_i}}{(x^2+\alpha_i x+\beta_i)^{m_i}}$*. Koeficienty* A, B, C *se dají jednoznačně určit pomocí řešení systému lineárních rovnic, který vyplývá z rozkladu.*

Příklad 1. *Určete koeficient u* x^{10} *v* $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$*, (parciální zlomky)*

Řešení. Nejdříve upravíme na součet parciálních zlomků

$$\frac{A}{1+3x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{(1-2x)^2} = \frac{A(1-2x)^2 + B(1+3x)(1-2x) + C(1+3x)}{(1+3x)(1-2x)^2}.$$

Odsud máme $2+x = A(1-2x)^2+B(1+3x)(1-2x)+C(1+3x)$, po expanzi dostaneme $A+B+C=2$, $-4A+B+3C-1$ a $4A-6B=0$, řešení je $A=3/5$, $B=2/5$ a $C=1$. Takže

$$\frac{2+x}{1-x-8x^2+12x^3} = (3/5)\frac{1}{1+3x} + (2/5)\frac{1}{1-2x} + \left(\frac{1}{1-2x}\right)^2.$$

Ze základních operací s mocninnými řadami pak vidíme, že $a_n = (3/5)(-3)^n + (2/5)2^n + (n+1)2^n$. □

2 Vytvořující funkce - k zamyšlení

Příklad 2. *Nahlédněte, že*

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots.$$

Důkaz. Jednoznačné vyjádření ve dvojkové soustavě. □

3 Vytvořující funkce - zobecněná binomická věta

Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1,1,1,\dots)$.

Zobecněná binomická věta. *Pro libovolné* $r \in \mathbb{R}$ *a* $x \in (-1,1)$ *platí*

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ *a* $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ *pro* $k \in \mathbb{N}$.

Jako důsledek Zobecněné binomické věty víme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1,1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i.$$

Příklad 3. *Rozmyslete si, že opravdu* $\binom{-r}{i} = (-1)^i \binom{r+i-1}{r-1}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~fila/

Řešení.

$$\binom{-r}{i} = \frac{-r(-r-1)(-r-2)\cdots(-r-(i-1))}{i!} =$$
$$= (-1)^i \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+(i-1))}{i!} = \binom{r+i-1}{i} = \binom{r+i-1}{r-1}.$$

□

Příklad 4. *Určete koeficient u příslušné mocniny x v následujících výrazech. Vyjádřete jej ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená čísla p a q.*

(a) u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$,

(b) u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$,

(c) u x^5 ve výrazu $\frac{1}{(1-2x)^2}$.

Řešení. (a) Ze základních operací s mocninnými řadami je vidět, že výraz se rovná $x^8 \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$. Podle zobecněné binomické věty je to rovno $x^8 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k}(-x)^k$. Koeficient u x^{15} je tak roven $\binom{-4}{7}$, což je koeficient u $(-x)^7$ v sumě. čili koeficient u x^{15} je v našem výrazu roven $(-1)^7\binom{-4}{7} = \binom{10}{7} = \binom{10}{3}$.

(b) Ze základních operací s mocninnými řadami je vidět, že výraz se rovná $\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^6$. Podle zobecněné binomické věty je koeficient u x^n v $\frac{1}{(1-x)^6}$ roven $\binom{n+5}{5}$. Po posunu doprava o 3 je koeficient u x^{n+3} v $\frac{x^3}{(1-x)^6}$ roven $\binom{n+5}{5}$. Po substituci x^2 je koeficient u $x^{2(n+3)}$ v $\frac{x^6}{(1-x^3)^6}$ roven $\binom{n+5}{5}$. čili koeficient u x^{28} je v našem výrazu roven $\binom{16}{5} = \binom{16}{11}$.

(c) Podle zobecněné binomické věty je to rovno $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}(-2x)^k$. Koeficient u x^5 je tak roven $\binom{-2}{5}(-2)^5$. Koeficient u x^5 je tedy v našem výrazu roven $\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!} \cdot (-2)^5 = 6 \cdot 2^5 = 192$.

□

Příklad 5. *Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $n = 1, 2, \ldots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva či doprava.*

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ určete pravděpodobnost u_{2n} jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme do počátku.

(b) Určete vytvořující funkci $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}x^n$.

(c) Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je f_{2n} pravděpodobnost jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme poprvé *do počátku. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = 0$ a $u_0 = 1$ platí*

$$u_{2n} = f_0u_{2n} + f_2u_{2n-2} + \cdots + f_{2n}u_0.$$

(d) Za použití výsledků z předešlých částí určete vytvořující funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}x^n$ a její koeficienty f_{2n} (a tedy i pravděpodobnosti, že se poprvé vrátíme do počátku po $2n$ krocích).

(e) Ukažte, že suma $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}$ konverguje a za použití tohoto faktu ukažte, že pravděpodobnost návratu do počátku se rovná jedné.

Řešení. (a) Daná pravděpodobnost je $\binom{2m}{m}/2^{2m}$, protože máme $2m$ kroků a v každém dvě možnosti, čímž je celkový počet procházek délky $2m$ roven 2^{2m}, a v každé procházce, která se vrátí do počátku, je počet kroků doleva rovný počtu kroků doprava a vybíráme jich tak právě m z $2m$ možných.

(b) Z vyjádření u_{2n} z první části máme $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-2n}x^n$. Podle zobecněné binomické věty je $\frac{1}{(1-x)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-2n}x^n$, protože

$$\binom{-1/2}{n}(-1)^n = \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}(-1)^n = 2^{-n}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!} = 2^{-2n}\binom{2n}{n}.$$

Takže $u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(c) Počet procházek, které mají $2n$ kroků a které se vrátí do počátku, je $2^{2n}u_{2n}$. Tyto procházky můžeme rozdělit do n skupin, podle toho, kdy se poprvé vrátily do počátku. Pro $k \in \mathbb{N}$, je počet procházek, které se poprvé vrátily do počátku v kroce $2k$, roven

$$f_{2k}2^{2k}u_{2n-2k}2^{2n-2k} = 2^{2n}f_{2k}u_{2n-2k},$$

protože se skládají ze dvou úseků (procházky délky $2k$, která se poprvé vrátí do počátku na svém konci, a procházky délky $2n-2k$, která je bez omezení, ale musí se na konci vrátit do počátku). Sečtením přes $k = 1, \ldots, n$ a použitím $f_0 = 0$ dostaneme

$$u_{2n} = f_0u_{2n} + f_2u_{2n-2} + \cdots + f_{2n}u_0.$$

(d) Podle rekurence z druhé části máme podle základní operace násobení $u(x) = 1 + u(x)f(x)$, tedy $f(x) = (u(x)-1)/u(x)$. Podle třetí části $u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ a tedy $f(x) = 1-(1-x)^{1/2}$. Na určení koeficientů lze použít Zobecněnou binomickou větu, ale snazší je si všimnout, že $f'(x) = u(x)/2$ a tedy $f(x)$ lze z $u(x)$ získat integrálem. Dostaneme, že

$$f_{2n} = u_{2n-2}/(2n) = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{(2n)2^{2n-2}} = \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)2^{2n}}.$$

(e) Z odhadů z přednášky víme, že $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}/\sqrt{2n}$ a tedy

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}(2n-1)}.$$

To je shora omezené (lze použít odhad integrálem $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x}x}\mathrm{d}x = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^\infty = \sqrt{2}$) a tedy suma konverguje. Tedy $f(1)$, což je pravděpodobnost návratu do počátku, je korektně definovaná hodnota a protože již víme, že $f(x) = 1-\sqrt{1-x}$, tak dostáváme $f(1) = 1$, což jsme chtěli.

Poznámka: celý postup platí i pro náhodné procházky ve vícedimenzionální mřížce, jen pravděpodobnosti u_{2n} jsou jiné, například $\binom{2n}{n}^2/2^{4n}$ pro $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, což pak vede na fukníi $u(x)$, která je hypergeometrická (vznikne z jednodimenzionální $u(x)$ operací tzv. Hadamardova součinu). Nicméně odhadem $u(1)$ se dá ukázat, že ve dvou dimenzích je pravděpodobnost stále jedna a ve více dimenzích už je ostře menší (nazývá se Pólyova věta). □

Příklad 6 (*)**.** *Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne na dvou standardních šestistěnných hracích kostkách?*

(Hint: $(x+\cdots+x^6) = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.)

Řešení. Kostka odpovídá tažení náhodných čísel z jisté množiny, například u standardní kostky je tato množina $\{1,2,3,4,5,6\}$. Označme jako A standardní kostku a nechť a_n je počet způsobů, jak na ní můžeme hodit číslo n. Tedy pro A máme vytvořující funkci $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Analogicky pro kostky B a C máme vytvořující funkce $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ a $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$.

Pro standardní kostku je tedy $a(x)$ vytvořující funkcí pro posloupnost $(0,1,1,1,1,1,1,0,0,\ldots)$, neboli $a(x) = x+\cdots+x^6$. Pokud d_n označuje počet způsobů kolika může dohromady na kostkách B a C padnout číslo n, pak $d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_nx^n = b(x)c(x)$, protože d_n je počet způsobů, kolika lze hodit k na B krát počet způsobů, kolika lze hodit $n-k$ na C, sečteno přes všechna k. Neboli $d_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_kc_{n-k}$, což je přesně definice koeficientů součinu $b(x)c(x)$. Stejně tak počet způsobů, kolika jde hodit n na dvou standardních kostkách je koeficient u n-tého členu $a(x)a(x)$.

Takže náš úkol je najít posloupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ takové, že platí

$$b(x)c(x) = a(x)a(x) = (x+\cdots+x^6)^2.$$

Jinak řečeno, chceme najít polynomy $b(x)$ a $c(x)$ s kladnými celočíselnými koeficienty takové, že $b(0) = c(0) = 0$ (bez nulových stěn), $b(1) = c(1) = 6$ (mají šest stěn), $b(x)c(x) = (x+\cdots+x^6)^2$ a $b(x), c(x) \neq x+\cdots+x^6$.

Polynom $(x+\cdots+x^6)^2$ se dá přepsat na ireducibilní rozklad

$$x^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2.$$

Ty se pokusíme nyní rozdělit na součin dvou polynomů odpovídajícím nestandardním šestistěnným kostkám. Je-li $x = 1$, tak $x+1 = 2$, $x^2+x+1 = 3$, $x^2-x+1 = 1$. Takže každá z kostek B a

C musí mít po jedné kopii $x+1$ a x^2+x+1, aby vyšlo šest stěn. Stejně tak, abychom se zbavili konstantních členů, musí mít každý po jedné kopii x. Takže nám vyjde jediná možnost, jak zvolit kostky nestandardně:

$$b(x) = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2 = x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x$$

a

$$c(x) = x(x+1)(x^2+x+1) = x^4+2x^3+2x^2+x.$$

Takže máme kostky se stěnami $\{1,3,4,5,6,8\}$ a $\{1,2,2,3,3,4\}$.

Pokud bychom povolili stěny s nulovou hodnotou, tak se postup téměř nezmění. Jen můžeme vypustit podmínku na dosazení nuly v polynomech $b(x)$ a $c(x)$ a dostaneme navíc třeba kostky $\{0,1,1,2,2,3\}$ a $\{2,4,5,6,7,9\}$ nebo triviálně $\{0,1,2,3,4,5\}$ a $\{2,3,4,5,6,7\}$. Podobně triviálně můžeme dostat nekonečně mnoho nestandardních kostek, pokud povolíme záporné stěny. $\square$

Nechť $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$.

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x)+b(x)$	$(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x)-a_0-\cdots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1}, \ldots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$