Kombinatorika a grafy I — 9. cvičení*

6. prosince 2022

1 Počty koster

Kostra v grafu $G = (V, E)$ je stromem $T = (V, E')$ s $E' \subseteq E$. Neboli T je souvislým podgrafem grafu G na stejné množině vrcholů a T navíc neobsahuje cyklus. Graf má kostru právě tehdy, když je souvislý. Pro graf G označme jako $\kappa(G)$ počet koster grafu G.

Cayleyho vzorec. *Pro každé celé číslo $n \geq 2$ je počet koster úplného grafu K_n na n vrcholech roven n^{n-2}. Neboli $\kappa(K_n) = n^{n-2}$*

Laplacián grafu $G = (\{1, \dots, n\}, E)$ je $n \times n$ matice $L(G) = (L_{i,j})_{i,j=1}^n$, kde

$$L_{i,j} = \begin{cases} \deg_G(i), & \text{pokud } i = j, \\ -1, & \text{pokud } \{i, j\} \in E, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta. *Pro každý graf $G = (\{1, \dots, n\}, E)$ platí $\kappa(G) = \det(L(G)^{1,1})$, kde $L(G)^{1,1}$ značí matici $L(G)$ bez prvního řádku a bez prvního sloupce.*

Z přednášky také víme, že počet koster úplného grafu K_n bez jedné hrany je roven $(n-2)n^{n-3}$ a počet koster úplného grafu K_n obsahujících pevně zvolenou hranu je $2n^{n-3}$.

Příklad 1. *Spočtěte počet koster v následujících grafech:*

(a) $K_n \div e$, *tedy grafu* K_n *s jednou podrozdělenou hranou* e,

(b) $K_n \div E$, *tedy grafu* K_n *se všemi hranami podrozdělenými,*

(c) $C_m \oplus_e C_n$, *tedy dvou cyklů slepených společnou hranou* e,

(d) $C_m \oplus_e K_n$.

Řešení. (a) Podle přednášky je počet koster K_n neobsahující e roven $(n-2)n^{n-3}$ a počet koster obsahujících e je $2n^{n-3}$. Každou kostru neobsahující e jde započítat dvěma způsoby podle toho, kterou hranu z podrozdělení e obsahují. Každá kostra obsahující e musí obsahovat obě podrozdělené hrany, jinak kostra není souvislá. Tedy $\kappa(K_n \div e) = 2(n-2)n^{n-3} + 2n^{n-3} = 2(n-1)n^{n-3}$.

(b) Podle Cayleyho vzorce je počet koster v K_n roven n^{n-2}. Každá hrana kostry musí obsahovat obě podrozdělené hrany, jinak by kostra celého grafu nebyla souvislá. Za každou hranu neobsaženou kostře je potřeba napojit nový vrchol z dané hrany na zbytek kostry. Tedy určit jeden z konců příslušné původně nepodrozdělené hrany. Tedy $\kappa(K_n \div E) = n^{n-2}2^{\binom{n}{2}-n+1}$.

(c) Chceme z každého cyklu kostru, která obsahuje hranu e a těch je $m-1$ a $n-1$, protože v každé kostře cyklu se jen musí vybrat jedna vynechaná hrana. Za každou takovou kostru v C_m lze vzít každou takovou kostru v C_n, čili jejich počty mezi sebou vynásobíme, čímž máme $(m-1)(n-1)$. Nelze mít kostry, které by se obě vyhýbaly e, protože pak bychom měli C_{m+n-2} a nelze ani vzít jednu kostru, která by se e vyhýbala a druhá ne, protože pak bychom měli celý cyklus C_n či C_m. Lze ale vzít jednu kostru, která se hraně e vyhýbá a vzít druhý cyklus bez e a bez jedné další hrany. Tuto další hranu jde vybrat $n-1+m-1 = n+m-2$ způsoby. Tedy $\kappa(C_m \oplus_e C_n) = (m-1)(n-1) + m + n - 2$. Například $\kappa(C_3 \oplus_e C_3) = 8$.

(d) Každá kostra v K_n jde rozšířit na kostru celého grafu vynecháním jedné hrany z $C_m - e$, tedy $(m-1)n^{n-2}$ způsoby podle Cayleyho formule. Jinak kostra celého grafu má v K_n dvě komponenty, které jsou spojené cestou $C_m - e$. Počet takových koster je roven počtu koster v K_n, které obsahují hranu e a těch je podle přednášky $2n^{n-3}$. Tedy $\kappa(C_m \oplus_e K_n) = (m-1)n^{n-2} + 2n^{n-3}$. Například $\kappa(C_3 \oplus_e K_3) = 3 \cdot 3^{3-2} + 2 \cdot 3^{3-3} = 8$.

□

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~fila/

Příklad 2. *Spočtěte počet koster úplného grafu K_n za použití věty o determinantu Laplaciánu.*

Řešení. Použijeme tvrzení, které říká, že determinant Laplaciánu grafu G bez prvního řádku a prvního sloupce je roven počtu koster v grafu G. Laplaciánem úplného grafu na n vrcholech je následující $n \times n$ matice:

$$\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Nyní odebereme první řádek a první sloupce, odečteme první řádek od všech kromě prvního a poté přičteme všechny sloupce kromě prvního k prvnímu sloupci, tak dostaneme $n-1 \times n-1$ matici

$$\begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -n & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Determinant této matice je n^{n-2}, protože se jedná o horní trojúhelníkovou matici s prvky na diagonále $1, n, \dots, n$.

□

Příklad 3. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{n,m}$ za použití věty o determinantu Laplaciánu.*

Řešení. Použijeme tvrzení, které říká, že determinant Laplaciánu grafu G bez prvního řádku a prvního sloupce je roven počtu koster v grafu G. Laplaciánem úplného grafu na n vrcholech je následující $m + n \times m + n$ matice:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & m & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

Odebereme-li první řádek, pak bloky s diagonálou mají velikosti $(m-1) \times (m-1)$ a $n \times n$. Poté k poslednímu řádku přičteme ostatní řádky, čímž se poslední řádek změní na $0, \dots, 0, 1, \dots, 1$. Pak poslední řádek přičteme k řádkům $1, \dots, m-1$, čímž dostaneme dolní trojúhelníkovou matici s diagonálou $n, \dots, n, m, \dots, m, 1$. Tedy $\kappa(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$ □

Příklad 4. *Spočtěte počet koster grafu, který vznikne slepením úplných grafů K_n a K_m přes společnou hranu.*

Řešení. Podle Cayleyho formule (a i podle předešlého příkladu) je počet koster K_n roven n^{n-2}. Počet párů (e, T), kde T je kostra v K_n a $e \in E(T)$ je její hrana, je $(n-1)n^{n-2}$. Každá hrana je ze symetrie ve stejném počtu koster a tedy počet párů (e, T) je také $\binom{n}{2} \cdot x$, kde x je počet koster K_n s pevně zvolenou hranou. Po vyřešení rovnice $(n-1)n^{n-2} = \binom{n}{2} \cdot x$ je tedy $x = (n-1)n^{n-2}/\binom{n}{2} = 2n^{n-3}$.

Buď G graf vzniklý slepením klik K_n a K_m přes společnou hranu e. Každá kostra T v G buď obsahuje hranu e nebo ne. Pokud ji obsahuje, pak je T sjednocením kostry v K_n a kostry v K_m, kde obě kostry obsahují hranu e, protože v každé klice T indukuje kostru. Navíc každé sjednocení kostry v klice v K_n obsahující hranu e s kostrou v klice v K_m obsahující hranu e dává kostru v G, protože obě kostry sdílí jednoznačně určenou cestu mezi vrcholy u a v a tedy jejich sjednocením je strom na všech vrcholech G. Takových možností je $4n^{n-3}m^{m-3}$.

Nechť T hranu e neobsahuje. Pak vrcholy právě jedné z klik indukují v T les se dvěma stromy, každý obsahující jeden z vrcholů hrany e. Aspoň jedna z klik musí v T indukovat strom, protože jinak T není souvislý (žádná klika nemůže v T indukovat komponentu souvislosti bez vrcholů hrany e a obě kliky nemohou obsahovat tyto vrcholy v různých komponentách). Obě kliky nemohou v T indukovat strom, protože jinak máme v T dvě disjunktní cesty mezi těmito vrcholy a tedy cyklus v T. V klice, kde kostra neindukuje souvislý graf je počet takových možností roven počtu koster s vybranou hranou e. V klice, kde kostra indukuje souvislý graf je počet možností roven počtu koster bez hrany e.

Potom počet koster v našem grafu je roven $4n^{n-3}m^{m-3} + 2n^{n-3}(m-2)m^{m-3} + 2m^{m-3}(n-2)n^{n-3}$. Například v případě $n = 3 = m$ dostáváme $4 + 2 + 2 = 8$ a pro $m = 3, n = 4$ zase $16 + 16 + 8 = 40$, což odpovídá. $\square$