

Kombinatorika a grafy I — 3. cvičení*

17. října 2022

1 Vytvořující funkce – úvod

Příklad 1. (a) Mějme polynomy $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ a $q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$. Jaký je koeficient u členu x^7 v jejich součinu $p(x)q(x)$? !

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

Příklad 2. V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků—větrníky, kremrole a dortíky. Kolika způsoby jde nakoupit 7 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili aspoň dva kousky a zároveň koupili nanejvýš tři kremrole? Sestrojte příslušnou vytvořující funkci.

Binomická věta. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

2 Vytvořující funkce – počítání s mocninnými řadami

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako (obyčejnou) vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ a podle binomické věty je $(1+x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots)$. Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

Tvrzení. Buď $(a_0, a_1, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro všechna n . Potom pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu. Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \dots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Příklad 3. Mějme posloupnost $a_0, a_1, \dots$ s vytvořující funkcí $a(x)$. Jakou vytvořující funkci bude mít posloupnost prefixových součtů $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$?

Příklad 4. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$, !

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$, !

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$, !

(d) $(0, 2, 6, 12, 20, \dots)$, tedy n -tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel včetně nuly.

Příklad 5. Určete koeficient

(a) u x^{10} v $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$, (parciální zlomky)

(b) u x^{2018} v $\sin(x)$.

Příklad 6. Zjistěte, čemu se rovná a_n , které je zadáno rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$. !

Příklad 7. Zjistěte, čemu se rovná a_n , které je zadáno rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$
$x^k a(x)$	$(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $k - 1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \dots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, i a_i, \dots)$
$\int_0^x a(t) dt$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$