

Jetmar DÚ

1. důkaz indukcí

$$n = 1 \Rightarrow p=2$$

$$2 \leq 2^2(1-1)$$

$2 \leq 2^2$ Pro dosažení nejmenšího možného n je výrok pravdivý. Nyní však musíme dokázat pro obecné n a $n+1$

$p(n) \leq 2^2(n-1)$ Toto je předpoklad, který musíme prokázat.

$p(n) \leq 2^2(n-1)$ Čistě pro přehlednost provedeme úpravu

Indukční krok:

$$p(n+1) \leq 2^2n$$

$p(n+1) \leq 2^2n$ Tyto dvě zvýrazněné nerovnice prokazují existence našeho předpokladu uvnitř rovnice po rozšíření na $n+1$ čímž jsme dokázali pravdivost tohoto výroku

2. Důkaz o složení libovolného čísla nad 7 z čísel 3 a 5.

n - suma, kterou chceme složit z peněz

x, y - proměnné (počet trojek a pětáků)

Abychom složili číslo vzniká nám rovnice:

$$n = 5x + 3y \quad \text{Podmínka: } n > 7$$

$$n = 8 \Rightarrow 8 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1$$

Od této chvíle se střídají tyto cyklující se scénáře (mohou vzniknout i 2 najednou):

1. Přidá se se 3
2. 5 je nahrazena dvěma 3 a naopak
3. pět 3 je nahrazeno třemi 5

Př.:

$$x(1) = 8 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1$$

$$x(2) = 9 = 0 \cdot 5 + 3 \cdot 3$$

$$x(3) = 10 = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3$$

Proč? Protože nastávají tyto opakující scénáře, které prokazují nekonečnost čísel, které můžu poskládat.

$$x(4) = 11 = x(1) + 3$$

$$x(5) = 12 = x(2) + 3$$

$$x(6) = 13 = x(3) + 3$$

...

Obecně zapsáno:

$$x(n) = x(n-3) + 3$$

$$x(n+1) = x(n-2) + 3 \text{ Toto dokazuje že počet čísel, které mohu poskládat z trojek a pětek je nekonečně mnoho.}$$

3. Důkaz indukcí, že $n^5 - n$ ($n \in \mathbb{N}$) je dělitelné 5 beze zbytku.

$$n = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0/5 = 0 \text{ Dosazení pro nejmenší } n.$$

Obecný předpoklad:

5 nedělí $n^5 - n$

Indukční Krok:

$$(n+1)^5 - (n+1)$$

$$n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - (n+1) \text{ Zde se zbavíme jedničky a } n \text{ neodečítáme, bude se hodit.}$$

$$n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n$$

Zeleně vyznačená část je náš předpoklad, měl by tedy být nedělitelným 5. Nyní zbývá jen prokázat, že zbytek po rozšíření na $n + 1$ je dělitelný 5 (označen hnědou barvou)

$$[5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n] / 5 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$$

Tato část je také dělitelná 5, čímž jsme dokázali, že $n^5 - n$ ($n \in \mathbb{N}$) je dělitelné 5 beze zbytku.

PS: Rád bych věděl, zda tento formát a tento zápis by vyhovovala i pro příští úkoly.