

Kombinatorika a grafy I — 3. cvičení*

18. října 2022

1 Vytvořující funkce – úvod

Příklad 1. (a) Mějme polynomy $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ a $q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$. Jaký je koeficient u členu x^7 v jejich součinu $p(x)q(x)$?

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

Řešení. (a) Není třeba počítat celý součin, stačí se dívat jen na některé členy. Sedmička v exponentu vznikne jako součet dvou exponentů, jeden je u členu polynomu p , druhý u členu polynomu q . Tedy možnosti jsou $7 = 1 + 6 = 3 + 4 = 5 + 2$. Koeficienty u členů se vynásobí a pak sečtou, protože jsou všechny jedničkové, tak je součet 3, což je i výsledný koeficient. Pro zajímavost, součin vyjde $p(x)q(x) = x^{11} + x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 3x^7 + 3x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

(b) Chceme vlastně znát počet řešení rovnice $x + y = 7$, kde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $y \in \{0, 2, 4, 6\}$. Pokud sestavíme polynomy $p(x)$ a $q(x)$ jako v předešlé části, tak počet řešení je vlastně koeficient u x^7 , což je tři. To taky odpovídá nákupům, ke kterým bychom došli rozбором případů: $(2, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 1, 1, 1)$ a $(2, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Dá se najít i rychleji rozбором případů, ale tahle metoda je užitečnější, jak uvidíme. Budeme podobně moci spočítat i mnohem složitější příklady a s programem na počítání součinů polynomů i úlohy na velkých vstupech. □

Příklad 2. V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků—větrníky, kremrole a dortíky. Kolika způsoby jde nakoupit 7 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili aspoň dva kousky a zároveň koupili nanejvýš tři kremrole? Sestrojte příslušnou vytvořující funkci.

Řešení. Chceme tedy znát počet řešení rovnice $x + y + z = 7$, kde $x \in \{2, 3, 4, \dots, 7\}$, $y \in \{2, 3, 4, \dots, 7\}$ a $z \in \{2, 3\}$. Postupujeme podobnou myšlenkou jako v prvním příkladě a nejdřív si sestavíme vhodné polynomy, které pak vynásobíme a podíváme se na vhodný koeficient. Danými polynomy jsou $p(x) = x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{12} = q(x)$ a $r(x) = x^2 + x^3$. Po vynásobení dostaneme $p(x)q(x)r(x) = x^{27} + 3x^{26} + 5x^{25} + 7x^{24} + 9x^{23} + 11x^{22} + 13x^{21} + 15x^{20} + 17x^{19} + 19x^{18} + 21x^{17} + 21x^{16} + 19x^{15} + 17x^{14} + 15x^{13} + 13x^{12} + 11x^{11} + 9x^{10} + 7x^9 + 5x^8 + 3x^7 + x^6$ a zajímá nás člen u x^7 , což je 3. □

Binomická věta. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

2 Vytvořující funkce – počítání s mocninnými řadami

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako (obyčejnou) vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ a podle binomické věty je $(1+x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots\right)$. Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

Tvrzení. Buď $(a_0, a_1, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro všechna n . Potom pro každé $x \in \left(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$ řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu. Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \dots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>

Příklad 3. Mějme posloupnost $a_0, a_1, \dots$ s vytvořující funkcí $a(x)$. Jakou vytvořující funkci bude mít posloupnost prefixových součtů $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$?

Řešení. Můžeme si představit jako danou posloupnost $a_0, a_1, \dots$ plus tuto posloupnost o jedna posunutě plus tuto posloupnost o dva posunutě atd. Celkově tedy $a(x) + xa(x) + x^2a(x) + \dots = \frac{1}{1-x}a(x)$.

Alternativně to můžeme vnímat jako posloupnosti podle daných koeficientů. Tedy že sčítáme posloupnost $(a_0, a_0, a_0, \dots)$ plus $(0, a_1, a_1, \dots)$, $\dots$ $\square$

Příklad 4. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$, !

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$, !

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$, !

(d) $(0, 2, 6, 12, 20, \dots)$, tedy n -tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel včetně nuly.

Řešení. (a) Funkce $1/(1-x)$ generuje $(1, 1, 1, \dots)$. Potom funkce $1/(1+x)$ generuje $(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ a posunutím (= vynásobením funkce x^4) a vynásobením -6 dostaneme $-6x^4/(1+x)$ generující zadanou posloupnost.

(b) Substitucí $2x$ jako proměnnou máme vytvořující funkci $1/(1-2x)$ pro posloupnost $(1, 2, 4, 8, \dots)$. Takže dosadíme-li $2x^2$ jako proměnnou, tak máme vytvořující funkci $1/(1-2x^2)$ pro $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, \dots)$. Pak už jen stačí přičíst tutéž posloupnost posunutou o jedna doprava (funkce $x/(1-2x^2)$) a dostaneme vytvořující funkci $(1+x)/(1-2x^2)$ pro zadanou posloupnost.

(c) Zderivujeme-li vytvořující funkci $1/(1-x)$ pro $(1, 1, 1, \dots)$, tak dostaneme funkci $1/(1-x)^2$ pro $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Druhá derivace $2/(1-x)^3$ nám dá vytvořující funkci pro $(2 \cdot 1, 3 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots)$, tedy k -tý člen posloupnosti je tvaru $(k+1)(k+2) = (k+1)^2 + k + 1$. My chceme tvar $(k+1)^2$, tedy musíme odečíst funkci pro první derivaci. Dostaneme tak $2/(1-x)^3 - 1/(1-x)^2$.

(d) Nejdříve použijeme $\frac{1}{(1-x)^2}$ k nagenarování $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$. Když ji vynásobíme členem $2x$, tak dostaneme $a(x) = \frac{2x}{(1-x)^2}$ generující $(0, 2, 4, 6, \dots)$. Vynásobíme-li ji funkcí $b(x) = \frac{1}{1-x}$, která generuje $(1, 1, 1, 1, \dots)$, tak dostaneme součty. Takže hledaná generující funkce je

$$a(x)b(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Dá se nahlédnout, že stačí posunout vpravo druhou derivaci $b(x)$. $\square$

Příklad 5. Určete koeficient

(a) u x^{10} v $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$, (parciální zlomky)

(b) u x^{2018} v $\sin(x)$.

Řešení. (a) Nejdříve upravíme na součet parciálních zlomků

$$\frac{A}{1+3x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{(1-2x)^2} = \frac{A(1-2x)^2 + B(1+3x)(1-2x) + C(1+3x)}{(1+3x)(1-2x)^2}.$$

Odsud máme $2+x = A(1-2x)^2 + B(1+3x)(1-2x) + C(1+3x)$, po expanzi dostaneme $A+B+C=2$, $-4A+B+3C=1$ a $4A-6B=0$, řešení je $A=3/5$, $B=2/5$ a $C=1$. Takže

$$\frac{2+x}{1-x-8x^2+12x^3} = (3/5)\frac{1}{1+3x} + (2/5)\frac{1}{1-2x} + \left(\frac{1}{1-2x}\right)^2.$$

Ze základních operací s mocninnými řadami pak vidíme, že $a_n = (3/5)(-3)^n + (2/5)2^n + (n+1)2^n$.

(b) Necht $\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Je-li $x = 0$, pak $0 = a_0$. Po zderivování obou stran máme $\cos(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$, po dosazení $x = 0$ dostaneme $1 = a_1$. Po druhém zderivování máme $-\sin(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot \dots \cdot 3 \cdot a_4 + \dots$ a opět po dosazení $x = 0$ máme $0 = 2a_2$. Pokud bychom takto pokračovali, tak dostaneme $-1 = 3!a_3, 0 = 4!a_4, 1 = 5!a_5, 0 = 6!a_6, -1 = 7!a_7, 0 = 8!a_8, \dots$. Neboli Taylorův rozvoj funkce sinus. Protože $2018 \equiv 2 \pmod{4}$, tak máme $a_{2018} = \frac{0}{2018!} = 0$. □

Příklad 6. Zjistěte, čemu se rovná a_n , které je zadáno rekurentní rovnicí $a_0 = 1, a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$. !

Řešení. Pokud rovnici vynásobíme členem x^n a všechny vzniklé rovnice sečteme přes možná n , tak dostaneme pro funkci $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rovnici

$$\frac{a(x) - 1 - 9x}{x^2} = 6 \frac{a(x) - 1}{x} - 9a(x).$$

to se dá přepsat a upravit na

$$a(x) = \frac{1 + 3x}{1 - 6x + 9x^2} = \frac{1}{(1 - 3x)^2} + \frac{3x}{(1 - 3x)^2}.$$

Z $\frac{1}{1-x} \sim (1, 1, 1, \dots)$ se dostaneme dosazením na $\frac{1}{1-3x} \sim (1, 3, 9, 27, \dots)$, pak derivací na $\frac{3}{(1-3x)^2} \sim (1 \cdot 3, 2 \cdot 9, 3 \cdot 27, \dots)$ a vydělením třemi na $\frac{1}{(1-3x)^2} \sim (1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 9, \dots)$, čili z prvního členu máme koeficient $(n+1) \cdot 3^n$ u x^n . Funkce $\frac{3x}{(1-3x)^2}$ se dostane z $\frac{3}{(1-3x)^2} \sim (1 \cdot 3, 2 \cdot 9, 3 \cdot 27, \dots)$ posunem vlevo o jedna, což vede na koeficient $n \cdot 3^n$ u x^n . Součtem pak máme $a_n = (2n+1)3^n$. □

Příklad 7. Zjistěte, čemu se rovná a_n , které je zadáno rekurentní rovnicí $a_0 = 1, a_1 = 2$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.

Řešení. Pokud rovnici vynásobíme členem x^n a všechny vzniklé rovnice sečteme přes možná n , tak dostaneme pro funkci $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rovnici

$$\frac{a(x) - 1 - 2x}{x^2} = 5 \frac{a(x) - 1}{x} - 6a(x).$$

to se dá přepsat a upravit na $a(x) = \frac{1-3x}{1-5x+6x^2} = \frac{1}{1-2x}$. Ze základních operací víme, že $a_n = 2^n$. □

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$
$x^k a(x)$	$(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \dots - a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, i a_i, \dots)$
$\int_0^x a(t) dt$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$