

1. Definujme vnoření:

$$f(a, b) = \begin{cases} -\frac{1}{b} & (a=1) \\ b & (a=2) \end{cases} \quad \dots \quad \begin{aligned} & f(1, x) < 0 \text{ (lebo} \\ & \quad \quad \quad b \in \mathbb{N} \text{ je} \\ & \quad \quad \quad \text{poz.)} \\ & f(2, x) > 0 \text{ (-lt)} \end{aligned}$$

Pre $(a, b) \leq (c, d)$ platí:

$$a < c \text{ alebo } a = c \text{ a } b < d$$

(A) ~~A~~ Jedina kombinácia a, c ($a, c \in \{1, 2\}$)

kde $a < c$ je $a=1$ a $c=2$.

~~f~~ ~~aby~~ ~~f~~ bolo vnoření
nutne platí:

$$f(a, b) \preceq f(c, d)$$

...

$$a \leq c \Rightarrow a=1, c=2$$

...

$$\left. \begin{aligned} f(1, b) < 0 \\ f(2, d) > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow f(1, b) < 0 < f(2, d)$$

$$\dots$$

$$f(1, b) \preceq f(2, d)$$

(B) $a = c \begin{cases} a = c = 1 \\ a = c = 2 \end{cases}$

B.1 $a = c = 1$

$$(1, b) \leq (1, d) \Rightarrow b < d$$

$$f(1, b) = -\frac{1}{b} \quad \dots \quad \text{keď } b \text{ stúpa } \frac{1}{b} \text{ klesá}$$

$$\text{a teda } -\frac{1}{b} \text{ stúpa}$$

$$\leadsto f(1, b) \preceq f(1, d) \Leftrightarrow b < d$$

$$(1, b) \leq (1, d) \swarrow \nearrow$$

B.2 $a=c=2$

$f(2,b) = b$ čiže $f(2,b)$ stúpa ok b
stúpa

$f(2,b) \leq f(2,d) \Leftrightarrow b < d$

QED

(2) Definujeme mocenie:

$f(a,b) = a^b - \frac{1}{b}$

Viemc povedzť že $0 < \frac{1}{b} < 1$ pre $b \in \mathbb{N}$

lebo je to vždy nejako ~~malé~~ menšie ako 1.

Teda od čísel $\frac{1}{b}$ nemôže byť číslo znížené o viac ok 1.

Stúpajúcim a no'm $f(a,b)$ stúpa.

$(f(a,b) < f(c,b) \Leftrightarrow a < c)$

Viemc že manipulovaním a zmeníme $f(a,b)$
vždy o jeden. Manipuláciou b nikdy nedokážeme
dosiahnuť vô väčšie zmeny ako o 1 lebo $0 < \frac{1}{b} < 1$.

Teda zmenou b nepredčítne zmenu a .

$(f(a,b) < f(c,d) \Leftrightarrow a < c)$

pre $a=c$ no'm už rozhoduje b o d .

$-\frac{1}{b} < -\frac{1}{d} \quad / \cdot (-1)$

$\frac{1}{b} > \frac{1}{d} \quad / \cdot b, d; b, d \in \mathbb{N}$

$d > b$

$f(a,b) \leq f(a,c)$
 $\Updownarrow$
 $b < c$

$$a < c \Rightarrow f(a, b) \leq f(c, d)$$

$$a = c \Rightarrow f(a, b) \leq f(c, d) \Leftrightarrow b < d$$

$$\therefore f(a, b) \leq f(c, d) \Leftrightarrow$$

$$a < c$$

$$a = c \wedge b < d$$

$$a = c \wedge b < d$$

QED