

Dělitelnost $[A]$. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^5 - n$ dělitelné 5 (beze zbytku)

Důkaz: Indukcí

1) Základní krok: $n=1$

Pro $n=1$ platí, že $1^5 - 1 = 0$, zatímco $0 \equiv 0 \pmod{5}$

2) Indukční krok od n k $n+1$:

$$(n+1)^5 - (n+1) = (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 2n + 1)(n+1) - (n+1) =$$

$$= (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)(n+1) - (n+1) =$$

$$= (n^5 + 4n^4 + 6n^3 + 4n^2 + n + n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - (n+1) =$$

$$= (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) - (n+1) =$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 =$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n \quad \text{Teď přidám výraz } n - n,$$

který nezmění původní výraz:

$$n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n + n - n =$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n =$$

$$= n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) \quad \text{První sčítanec je dělitelný}$$

5 podle indukčního předpokladu, druhý sčítanec je dělitelný 5, protože je násobkem 5, z čehož

dostáváme, že $n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ je dělitelný 5.

□