

Kombinatorika a grafy I — 4. cvičení*

25. října 2022

1 Vytvořující funkce - parciální zlomky

Tvrzení (Rozklad na parciální zlomky). *Uvažujme podíl polynomů $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde b úno (jinak to můžeme snadno částečně vydělit) q má vyšší stupeň než p a má rozklad*

$$q(x) = (x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_N)^{n_N} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{m_1} \dots (x^2 + \alpha_M x + \beta_M)^{m_M}.$$

Pak můžeme zmíněný podíl rozložit na součet tzv. parciálních zlomků, kde za každý člen $(x - a_i)^{n_i}$ v rozkladu q budou členy $\frac{A_{i,1}}{x - a_i} + \dots + \frac{A_{i,n_i}}{(x - a_i)^{n_i}}$ a za každý člen $(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{m_i}$ budou členy $\frac{B_{i,1}x + C_{i,1}}{x^2 + \alpha_i x + \beta_i} + \dots + \frac{B_{i,m_i}x + C_{i,m_i}}{(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{m_i}}$. Koeficienty A, B, C se dají jednoznačně určit pomocí řešení systému lineárních rovnic, který vyplývá z rozkladu.

Příklad 1. Určete koeficient u x^{10} v $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$, (parciální zlomky)

2 Vytvořující funkce - k zamyšlení

Příklad 2. Nahlédněte, že

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots$$

3 Vytvořující funkce - zobecněná binomická věta

Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocnná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$.

Zobecněná binomická věta. Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \dots,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Jako důsledek Zobecněné binomické věty víme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i.$$

Příklad 3. Rozmyslete si, že opravdu $\binom{-r}{i} = (-1)^i \binom{r+i-1}{r-1}$.

Příklad 4. Určete koeficient u příslušné mocniny x v následujících výrazech. Vyjádřete jej ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená čísla p a q .

(a) u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$,

(b) u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \dots)^6$,

(c) u x^5 ve výrazu $\frac{1}{(1-2x)^2}$.

Příklad 5. Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $n = 1, 2, \dots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva či doprava.

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ určete pravděpodobnost u_{2n} jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme do počátku.

(b) Určete vytvořující funkci $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^n$.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>

- (c) Necht pro $n \in \mathbb{N}$ je f_{2n} pravděpodobnost jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme poprvé do počátku. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = 0$ a $u_0 = 1$ platí

$$u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

- (d) Za použití výsledků z předešlých částí určete vytvářející funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^n$ a její koeficienty f_{2n} (a tedy i pravděpodobnosti, že se poprvé vrátíme do počátku po $2n$ krocích).
- (e) Ukažte, že suma $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}$ konverguje a za použití tohoto faktu ukažte, že pravděpodobnost návratu do počátku se rovná jedné.

Příklad 6 (*). Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n , stejná jako pravděpodobnost, že n padne na dvou standardních šestistěnných hracích kostkách?

(Hint: $(x + \cdots + x^6) = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.)

Necht $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$.

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$
$x^k a(x)$	$(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, i a_i, \dots)$
$\int_0^x a(t) dt$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$