

# Kombinatorika a grafy I — 10. cvičení\*

13. prosince 2022

## 1 Počítání dvěma způsoby

*Počítání dvěma způsoby* je metoda důkazu v kombinatorice, kde odhadujeme neznámou  $x$  pomocí odhadů jiné neznámé  $z$ , které umíme určit dvěma způsoby: jeden za použití  $x$  a druhý přímým výpočtem. Zkombinováním obou odhadů pro  $z$  poté dostáváme odhad pro hledané  $x$ .

**Cauchyho–Schwarzova nerovnost.** Pro každé  $x, y \in \mathbb{R}^n$  platí

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

**Příklad 1.** Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednu společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

*Řešení.* Chceme určit počet dní  $x$ , které trvá tábor. Dvěma způsoby spočítáme

$$z = |\{(D, P) : D \in \{1, \dots, x\}, P \in \binom{\{1, \dots, 15\}}{2}, \text{ v den } D \text{ mají službu děti z páru } P\}|.$$

Podle prvního způsobu je  $z = 3x$ , protože každý z  $x$  dnů mají službu tři děti a ty tvoří tři páry. Podle druhého způsobu je  $z = \binom{15}{2}$ , protože každý pár z 15 dětí má službu právě jednou za celou dobu trvání tábora. Zkombinujeme-li způsoby, pak dostaneme  $3x = z = \binom{15}{2}$  a tedy celková doba trvání tábora je  $x = 35$  dní.  $\square$

**Příklad 2.** Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.

*Řešení.* Necht  $S$  množina studentů a  $U$  je množina úloh. Sporem předpokládejme, že každou úlohu nevyřešila většina studentů. Dvěma způsoby spočítáme

$$z = |\{(u, s) : u \in U, s \in S, \text{ student } s \text{ vyřešil úlohu } u\}|.$$

Podle prvního způsobu je  $z < |U||S|/2$ , protože každá úloha  $u \in U$  byla vyřešena méně než  $|S|/2$  studenty. Podle druhého způsobu je ale  $z \geq \frac{|S|}{2} \cdot \frac{2|U|}{3} + \frac{|S|}{2} \cdot \frac{|U|}{3} = |U||S|/2$ , protože většina studentů, a tedy aspoň polovina z nich, vyřešila aspoň dvě třetiny úloh a zbytek studentů vyřešil aspoň třetinu úloh. Zkombinujeme-li způsoby, pak dostaneme  $|U||S|/2 > z \geq |U||S|/2$ , což je spor.  $\square$

**Příklad 3.** Pole mřížky  $21 \times 21$  jsou obarvena tak, že v každém řádku i sloupci se vyskytuje nejvýše 5 různých barev. Ukažte, že se některá z barev vyskytuje ve třech řádcích a zároveň i ve třech sloupcích.

*Řešení.* Necht  $B$  množina barev. Sporem předpokládejme, že každá barva je buď v nanejvýš dvou sloupcích nebo nanejvýš dvou řádcích. Dvěma způsoby spočítáme

$$z = |\{(b, p) : b \in B, p \in [21]^2, \text{ políčko } p \text{ má barvu } b\}|.$$

Podle prvního způsobu je  $z = 21^2 = 441$ , protože každé políčko je obarvené právě jednou barvou. Podle druhého způsobu je ale  $z \leq 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 21 = 420$ , protože barvy, které jsou v nanejvýš dvou řádcích, přispějí nanejvýš  $2 \cdot 5 \cdot 21$  dvojicemi do  $z$ , protože za každý z 21 sloupců máme nanejvýš pět takových barev a každá je použita v nanejvýš dvou řádcích. Stejný příspěvek máme za barvy, které jsou v nanejvýš dvou sloupcích. Zkombinujeme-li způsoby, pak dostaneme  $420 \geq z = 441$ , což je spor.  $\square$

**Příklad 4.** Necht máme rovinné nakreslení grafu  $G$ , ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy  $G$  jsou obarveny třemi barvami (nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tj. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy). Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>

*Řešení.* Necht jsme použili červenou, modrou a zelenou barvu. Označme jako duhový trojúhelník ten, který má vrcholy obarvené všemi použitými barvami. Potom každý duhový trojúhelník obsahuje právě jednu červeno-modrou hranu. Každý trojúhelník, který není duhový, má takové hrany buď dvě nebo žádnou. Každá hrana je ve dvou stěnách, tedy při sčítání přes stěny je každá červeno-modrá hrana započítána dvakrát. Celkem tedy dostaneme sudý počet párů  $(e, F)$ , kde  $e$  je červeno-modrá hrana stěny  $F$ . Pokud by ale počet duhových trojúhelníků byl lichý, tak dostaneme tento počet nutně lichý (každý duhový přispěje lichým číslem, neduhový sudým).  $\square$

**Příklad 5** (\*). *Ukažte, že každý graf s  $N$  vrcholy neobsahující podgraf  $K_{2,2}$  má nanejvýš  $O(N^{3/2})$  hran.*

*Hint: Dvěma způsoby odhadněte počty podgrafů  $K_{1,2}$  a použijte Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.*

*Pro připomenutí: z pátého cvičení již víme, že odhad je až na multiplikativní konstantu těsný.*

*Řešení.* Mějme graf  $G = (V, E)$  bez  $K_{2,2}$ . Spočítáme dvěma způsoby počet  $M$  dvojic  $(v, \{u, u'\})$ , kde  $\{u, u', v\} \in \binom{V}{3}$  a  $\{v, u\}, \{v, u'\} \in E$ . Pro fixní  $u, u'$  existuje nanejvýš jedno takové  $v$  (jinak  $K_{2,2}$ ) a tedy  $M \leq \binom{N}{2}$ . Na druhou stranu každé fixní  $v$  přispívá  $\binom{\deg_G(v)}{2}$  páry  $\{u, u'\}$ . Dohromady máme  $\sum_{v \in V} \binom{\deg_G(v)}{2} \leq \binom{N}{2}$ . Můžeme předpokládat, že všechny stupně jsou aspoň jedna, protože nemá smysl přidávat izolované vrcholy. Potom  $\binom{\deg_G(v)}{2} \geq (\deg_G(v)-1)^2/2$  a  $\sum_{v \in V} (\deg_G(v)-1)^2 \leq n^2$ . Z Cauchy-Schwartzovy nerovnosti

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

pro  $x_v = \deg_G(v) - 1$  a  $y_v = 1$  máme

$$\sum_{v \in V} (\deg_G(v) - 1) \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{v \in V} (\deg_G(v) - 1)^2} \sqrt{N} \leq N^{3/2}.$$

V poslední nerovnosti jsme použili  $\sum_{v \in V} (\deg_G(v) - 1)^2 \leq \sum_{v \in V} \binom{\deg_G(v)}{2} \leq \binom{N}{2}$ . Protože  $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg_G(v)$ , tak  $|E| \leq \frac{1}{2}(N^{3/2} + N)$ .  $\square$