

Kombinatorika a grafy I — 8 cvičení*

22. listopadu 2022

1 Aplikace Hallovy věty

Vrcholovým pokrytím v grafu $G = (V, E)$ je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každé $e \in E$ platí $e \cap C \neq \emptyset$. *Párováním* v G je množina disjunktních hran z E .

Kőnigova–Egerváryho věta. V každém bipartitním grafu se velikost minimálního vrcholového pokrytí rovná velikosti maximálního párování.

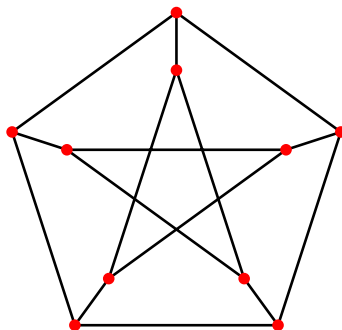
Nechť X a I jsou konečné množiny. *Množinovým systémem* na X nazveme $|I|$ -tici $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f : I \rightarrow X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v *incidenčním grafu* $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\} : i \in I, x \in M_i\})$.

Hallová věta. Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $|\bigcup_{j \in J} M_j| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá *Hallová*.

Příklad 1. Nechť a, b, c, d, e jsou různá přirozená čísla.

- (a) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů?
- (b) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů?

Příklad 2. Perfektní párování grafu G je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu G . Najděte všechna perfektní párování v Petersonově grafu. Ukažte, že víc jich neexistuje.



Příklad 3. Dokažte, že Hallová věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu.

Příklad 4. Latinský obdélník řádu $k \times n$, $k \leq n$ je matice typu $\{1, \dots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou. Latinský čtverec řádu n je latinský obdélník řádu $n \times n$.

Ukažte, že latinských čtverců řádu n je alespoň $\Omega((n!)^2)$.

Příklad 5. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k -tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.

Příklad 6 (*). Pro $n \times n$ matici $A = (a_{ij})$ definujeme permanent matice A jako

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>

- (a) Buď G bipartitní graf s partitami $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ a $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a nechť $a_{ij} = 1$, pokud $\{u_i, v_j\} \in E(G)$ a $a_{ij} = 0$ jinak. Ukažte, že počet perfektních párování v G je $\text{per}(A)$, kde $A = (a_{ij})$.
- (b) Nechť $A = (a_{ij})$ je nezáporná $n \times n$ matice, ve které se všechny řádkové a sloupcové součty rovnají jedné (tzv. dvojité stochastická matice). Ukažte, že $\text{per}(A) > 0$.