Kombinatorika a grafy I — 2. cvičení*

17. října 2022

1 Odhady

Mějme nezáporné funkce $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$. Potom značení $f(n) = O(g(n))$ znamená, že existují konstanty C a n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $f(n) \leq C \cdot g(n)$. Neboli funkce f roste asymptoticky nanejvýš tak rychle jako g. Podobně využíváme i následující značení:

Značení	Definice	Význam
$f(n) = \Omega(g(n))$	$\exists C > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\colon f(n) \geq C \cdot g(n)$	f roste aspoň tak rychle jako g
$f(n) = \Theta(g(n))$	$\exists C_1 > 0\ \exists C_2 > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\colon$ $C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$	f a g mají stejnou asymptotiku
$f(n) = o(g(n))$	$\forall C > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\colon f(n) \leq C \cdot g(n)$	f roste mnohem pomaleji než g
$f(n) \sim g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	$f(n)$ a $g(n)$ jsou téměř shodné

Příklad 1. *Seřaďte následující výrazy podle velikosti pro velké n (tedy například pro $n > 10^{10^{10}}$):*

$$2^{2n},\ \ e^{\ln^3 n},\ \ \binom{2n}{n},\ \ n^{\ln n},\ \ \left(\sqrt{n}\right)^n.$$

Řešení. Nejdřív si výrazy přepíšeme do tvarů, ve kterých se budou lépe porovnávat. Označme $\log x := \log_2 x$. Podle $\log_a x = \log_b x / \log_b a$ máme $e^{\ln^3 n} = 2^{\log^3 n/\log^2 e}$. Dále $n^{\ln n} = 2^{\log^2 n/\log e}$ a $\left(\sqrt{n}\right)^n = 2^{n\log n/2}$. Na binomický koeficient použijeme odhad $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$. Dohromady máme

$$2^{\log^2 n/\log e} \leq 2^{\log^3 n/\log^2 e} \leq \frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}} \leq 2^{2n} \leq 2^{n\log n/2},$$

čili

$$n^{\ln n} \leq e^{\ln^3 n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n} \leq \left(\sqrt{n}\right)^n.$$

□

Příklad 2. *Rozhodněte, zda jsou následující výrazy pravdivé.*

(a) $n! = 2^{O(n)}$,

(b) $n^2 + 5n\ln n = n^2(1 + o(1)) \sim n^2$,

(c) $n^{\ln n} = 2^{\Omega(n)}$,

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^8 = \Theta(n^9)$.

Řešení. (a) Neplatí, protože $n! \geq \lfloor n/2 \rfloor^{\lfloor n/2 \rfloor} = 2^{\Omega(n\log n)}$.

(b) Platí, protože $5n\ln n = o(1)n^2$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n\ln n}{n^2} = 1$.

(c) Neplatí, protože $n^{\ln n} = e^{\ln^2 n} = 2^{o(n)}$.

(d) Platí a ani není třeba součet počítat, protože z $i \leq n$ máme $\sum_{i=1}^{n} i^8 \leq n^9 = O(n^9)$. Na druhou stranu aspoň $n/2$ členů součtů má velikost aspoň $n/2$ a tedy $\sum_{i=1}^{n} i^8 \geq (n/2)(n/2)^8 = \Omega(n^9)$.

□

Příklad 3. *Nalezněte kladné a neklesající funkce $f(n)$ a $g(n)$ definované pro všechna přirozená čísla tak, aby neplatilo $f(n) = O(g(n))$ a ani $g(n) = O(f(n))$.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~fila/

Řešení. Definujeme tyto funkce tak, aby tvořily překrývající se schody. K tomu by mělo stačit například $f(n) := n!$ a $g(n)$ definované následovně:

$$g(n) := \begin{cases} (n-1)! & \text{if } n \equiv 0 \\ (n+1)! & \text{if } n \equiv 1 \\ n! & \text{if } n \equiv 2. \end{cases} \pmod 3$$

Obě funkce jsou kladné, neklesající a definované pro všechna přirozená čísla. Navíc pro $n \equiv 0 \pmod 3$ je $f(n) \geq ng(n)$ a pro $n \equiv 1 \pmod 3$ je $g(n) \geq (n+1)f(n)$. Čili $f(n)$ a $g(n)$ jsou asymptoticky neporovnatelné. □

Příklad 4. *Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $i = 1, 2, \ldots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva, doprava, nahoru, či dolů.*

(a) Úpravou postupu z přednášky pro náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ odhadněte støední hodnotu poètu návratù do počátku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Je tato hodnota shora omezená?

(b) (*) Odhadněte střední hodnotu počtu návratù do počátku pro náhodnou procházku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Řešení. (a) Nechť X je náhodná veličina udávající počet návratù do počátku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Potom $X = \sum_{n \geq 1} I_{A_{2n}}$, kde A_{2n} je jev „po $2n$ krocích jsme opět v počátku“. Všimneme si, že do počátku se můžeme vrátit pouze po sudém počtu krokù. Z linearity střední hodnoty máme

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} I_{A_{2n}}\right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[I_{A_{2n}}] = \sum_{n \geq 1} \Pr(A_{2n}).$$

Tedy zbývá určit $\Pr(A_{2n})$.

Celkový počet procházek délky $2n$ je 4^{2n}, protože máme čtyři možné směry. Počet procházek délky $2n$, ve kterých se vrátíme do počátku, je $\binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$, protože nejdřív ze všech $2n$ krokù vybereme n krokù, ve kterých se pohybujeme doleva či nahoru. Z těchto n krokù potom vybereme i těch, ve kterých se pohybujeme doleva (ve zbylých jdeme nahoru). Z n nevybraných krokù, ve kterých se pohybujeme doprava či dolů, poté zbývá vybrat i tìch, ve kterých se pohybujeme doprava (ve zbylých jdeme dolù). Platí $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$, protože $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ a obě strany počítají počet výběrù párù (A, B) z množiny S velikosti $2n$ rozdělené na dvě části M a N velikosti n takových, že $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ a $|A| + |B| = n$. Po použití odhadu $\binom{2n}{n} \geq 2^{2n}/(2\sqrt{n})$ z přednášky dostáváme

$$\Pr(A_{2n}) = \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} \geq \frac{1}{4n}.$$

Tedy

$$\mathbb{E}[X] \geq \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \to \infty,$$

protože $\sum_{i=1}^{m} 1/i = \Omega(\log m)$. Hodnota je tedy neomezená.

(b) Nechť X je náhodná veličina udávající počet návratù do počátku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Potom $X = \sum_{n \geq 1} I_{A_{2n}}$, kde A_{2n} je jev „po $2n$ krocích jsme opět v počátku“. Všimneme si, že do počátku se můžeme vrátit pouze po sudém počtu krokù. Z linearity střední hodnoty máme

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 1} I_{A_{2n}}\right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[I_{A_{2n}}] = \sum_{n \geq 1} \Pr(A_{2n}).$$

Tedy zbývá určit $\Pr(A_{2n})$.

Celkový počet procházek délky $2n$ je 6^{2n}, protože máme šest možných směrù. Počet procházek délky $2n$, ve kterých se vrátíme do počátku, je

$$\binom{2n}{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}^2\binom{n-i}{j}^2=\binom{2n}{n}\sum_{0\le i+j\le n}\binom{n}{i,j,n-i-j}^2,$$

protože nejdřív ze všech $2n$ krokù vybereme n krokù, ve kterých se pohybujeme doleva, nahoru, či dopředu. Z těchto n krokù potom vybereme i těch, ve kterých se pohybujeme doleva a ze zbylých $n-i$ vybíráme j tìch, kde se pohybujeme nahoru (ve zbylých $n-i-j$ jdeme dopředu). Z n nevybraných krokù, ve kterých se pohybujeme doprava, dolů, či dozadu, poté zbývá vybrat i těch, ve kterých se pohybujeme doprava, ze zbylých $n-i$ vybíráme j tìch, ve kterých jdeme dolù (ve zbylých $n-i-j$ jdeme dozadu). Platí $\sum_{0\le i+j\le n}\binom{n}{i,j,n-i-j}=3^n$, protože počítáme rozdělení n prvkù na tři části, a $\binom{n}{i,j,n-i-j}\le\binom{n}{n/3,n/3,n/3}$ (pro jednoduchost předpokládejme, že n je dělitelné třemi), protože $\binom{n}{i,j,n-i-j}=\binom{n}{i-1,j+1,n-i-j}\cdot\frac{i}{j+1}$ a $\frac{i}{j+1}>1$ pro $i>j+1$. Tedy

$$\sum_{0\le i+j\le n}\binom{n}{i,j,n-i-j}^2\le\binom{n}{n/3,n/3,n/3}\sum_{0\le i+j\le n}\binom{n}{i,j,n-i-j}=3^n\binom{n}{n/3,n/3,n/3}.$$

Po použití odhadu $\binom{2n}{n}\le 2^{2n}/\sqrt{2n}$ z přednášky a Stirlingovy formule dostáváme

$$\Pr(A_{2n})\le\frac{3^n\binom{2n}{n}\binom{n}{n/3,n/3,n/3}}{6^{2n}}\le\frac{3^n\cdot 2^{2n}\cdot\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\sqrt{2n}\cdot(2\pi n/3)^{3/2}\cdot(n/(3e))^n\cdot 6^{2n}}=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Tedy

$$\mathbb{E}[X]\le\sum_{n\ge1}O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)=O(1),$$

protože

$$\sum_{n\ge1}1/n^{3/2}\le\int_1^\infty 1/x^{3/2}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^\infty=2.$$

Hodnota je tedy omezená.

□