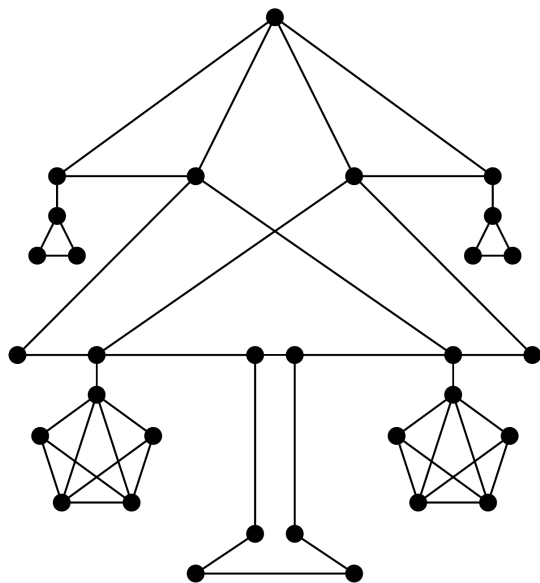


Stromeček strom [GRAF2] [3 × 2 b.]



Určete pro graf na obrázku:

- Kolik obsahuje indukovaných cyklů (tj. indukovaných podgrafů isomorfních cyklu)
- Nějakou minimální kostru, kde váha hrany je (pro tento účel) součet stupňů jejích koncových vrcholů a váha kostry je součet vah hran, z nichž se skládá
- Zda je rovinný

Maximální rovinný triang [GRAF2] [8 b.]

Maximální rovinný graf je takový graf, že přidání jakékoliv další hrany (samozřejmě na téže množině vrcholů) způsobí, že graf již není rovinný. *Triangulace* je rovinný graf, v němž je každá stěna (včetně vnější) trojúhelník. Dokažte, že každá triangulace je maximální rovinný graf a naopak každý maximální rovinný graf je triangulace. *Pozor:* tato úloha má relativně jednoduchý argument, pokud každá stěna je kružnice (což platí, je-li graf tzv. *hranově 2-souvislý*, neboli když neobsahuje most.) Neopomeňte ve svém důkazu i na grafy, které 2-souvislé nejsou.

Barvicí algoritmus balgo [GRAF2] [5 b.]

Na základě důkazu věty o 5 barvách navrhnete algoritmus, který rovinný graf obarví 5 barvami v čase $\mathcal{O}(n^c)$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$ (tzn. v polynomiálním, ale ne exponenciálním čase).

Mapy s oblastmi moblast [GRAF2] [6 b.]

Mějme politickou mapu, kde každý stát má nanejvýš k oblastí, tzn. $\leq k$ stěn této mapy odpovídá jednomu státu a v dobrém obarvení musí dostat stejnou barvu. Dokažte, že každá taková mapa má obarvení nanejvýš $5k + 1$ barvami.

(Kapitoly říkají, že je možná potřeba $6(k + 1)$, ale mě se to zdá jako chyba. Pokud se vám to $5k + 1$ barvami nebude dařit, odevzdejte jako řešení ten nejlepší horní odhad, jaký dovedete.)

Barevnost duálu rovinného eulerovského bdre [GRAF2] [4+4 b.]

Dokažte následující ekvivalenci: duál G^* rovinného grafu G je bipartitní právě tehdy když G je eulerovský. (4b za každou implikaci.)

d -degenerované grafy a trhání degelim [GRAF2] [4 b.]

V důkazu $d + 1$ -obarvitelnosti d -degenerovaných grafů jsme implicitně dokázali následující implikaci:

Pokud je G d -degenerovaný, pak existuje pořadí jeho vrcholů v_1, v_2, \dots, v_n takové, že, pro každé $i = 1, \dots, n$, v_i má nanejvýš d sousedů v grafu $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$, kde $G[S]$ pro $S \subseteq V(G)$ je podgraf G indukovaný množinou vrcholů S , neboli $V(G[S]) = S$ a $E(G[S]) = E(G) \cap \binom{S}{2}$. Neformálně řečeno: graf G lze postupně otrhat až na izolovaný vrchol tak, že vždy trháme vrchol stupně nanejvýš d .

(Když takovéto tvrzení máme, barvení už je jednoduché – můžeme jít od konce této posloupnosti a postupně “postavit” G přilepováním vrcholu, který má nanejvýš d sousedů ve stávajícím grafu – a pak vždy máme nějakou barvu, kterou lze takto nově lepený vrchol obarvit. Pro plný důkaz se podívejte do skript.)

Váš úkol je dokázat opačnou implikaci: pokud lze uspořádat vrcholy do sekvence v_1, \dots, v_n takové, že, pro každé $i = 1, \dots, n$, v_i má v $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$ nanejvýš d sousedů, pak je G d -degenerovaný. (Tzn. “otrhatelnost” vrcholy stupně nanejvýš d je ekvivalentní s d -degenerovaností.)