

Kombinatorika a grafy I — 6. cvičení*

14. listopadu 2022

1 Projektivní roviny

Příklad 1. (a) Ukažte, že existuje graf s N vrcholy a s aspoň $\Omega(N^{3/2})$ hranami, který neobsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf.

(b) Bonusový příklad (*): ukažte, že každý takový graf má nanejvýš $O(N^{3/2})$ hran. Hint: dvěma způsoby spočítejte počet kopií $K_{1,2}$.

2 Latinské čtverce

Latinský čtverec řádu n je tabulka o rozměrech $n \times n$ nad prvky z $\{1, 2, \dots, n\}$, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce L a L' jsou *ortogonální*, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel (a, b) z $\{1, 2, \dots, n\}$ existuje $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $(a, b) = ((L)_{ij}, (L')_{ij})$. Množina $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$ Latinských čtverců je množinou *navzájem ortogonálních Latinských čtverců*, pokud každé dva čtverce z této množiny jsou ortogonální. Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

1	2	3	4
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Příklad 2. Rozhodněte, zda permutace řádků a sloupců zachovávají vlastnost být latinským čtvercem a zda tyto operace zachovávají ortogonalitu (operace je provedena na jednom z čtverců, pro ortogonalitu).

3 Toky v sítích

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v:(u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v,z).$$

Řezem nazveme podmnožinu E , po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* R je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.

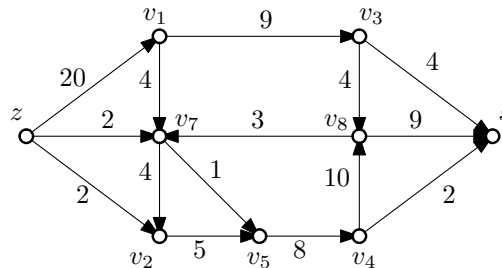
Jako *rezervu hrany* e na nějaké cestě P ze z do s označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru P a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru P . Cesta P je pak *zlepšující*, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~fila/>

Algorithm 3.1: FORD–FULKERSON(G)

$f \leftarrow$ nulový tok
while existuje zlepšující cesta P ze z do s
 $\epsilon_P \leftarrow \min_{e \in E(P)} r(e)$
 do $\begin{cases} \text{Zvětšíme tok } f \text{ podél } P \text{ o } \epsilon_P \text{ (každé hraně } e \text{ po směru zvětšíme} \\ f(e) \text{ a hranám proti směru zmenšíme } f(e)). \end{cases}$
 Vrať tok f .

Příklad 3. Najděte Fordovým–Fulkersonovým algoritmem tok maximální velikosti v následující síti. Nalezněte také řez minimální kapacity a ověřte tak, že daný tok má skutečně maximální velikost.



Příklad 4. (a) Najděte síť (a posloupnost použitých zlepšujících cest), na které F.-F. algoritmus nedospěje ke správnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen orientované zlepšující cesty.

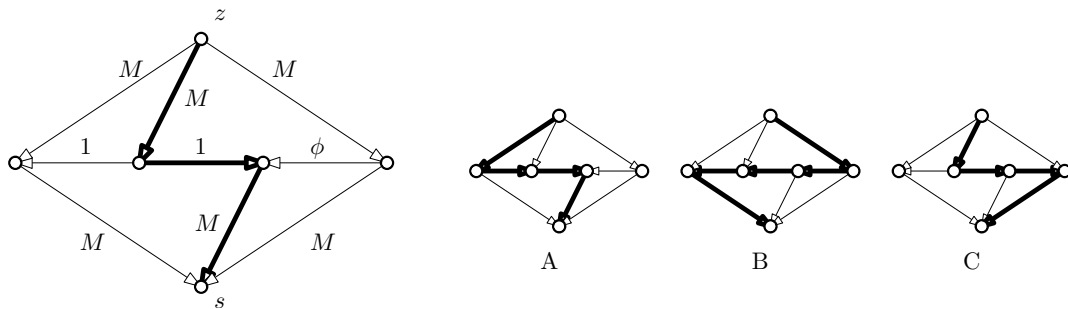
(b) Najděte posloupnost sítí (a posloupnosti použitých zlepšujících cest), na které má F.-F. algoritmus exponenciální časovou složitost (vzhledem k počtu bitů potřebných k uložení grafu a kapacit).

Příklad 5. Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům („vrcholem v nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času“). Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?

Příklad 6. Ukažte, že problém hledání maximálního toku v síti, která má více zdrojů a více stoků, lze redukovat na případ s jedním zdrojem a jedním stokem.

Příklad 7. Dokažte, že počet toků maximální velikosti je v každé síti buď jedna nebo je nekonečný.

Příklad 8. (*) Najděte síť s iracionálními váhami, na které F.-F. algoritmus nenajde maximální tok. (Hint:



Kde $\phi^2 = 1 - \phi$.

Příklad 9. (*) Rozmyslete si analýzu Edmonds-Karpova algoritmu:

Algorithm 3.2: EDMONDSKARP(G)

$f \leftarrow$ nulový tok
while existuje zlepšující cesta P ze z do s
 Buď P taková cesta s minimálním počtem hran.
 $\epsilon \leftarrow \min_{e \in P} r(e)$
 do $\begin{cases} \text{Zvětšíme tok } f \text{ podél } P \text{ o } \epsilon \text{ (každé hraně } e \in P \text{ zvětšíme} \\ f(e), \text{ případně zmenšíme } f(e'), \text{ podle toho, co jde).} \end{cases}$
