

2. Série domácích úkolů

Odevzdávejte do 10. 11. 14:00

1. *Jednosměrný algoritmus s nejkratšími cestami:* [5b]
Naivní verze Ford-Fulkersonova algoritmu, která hledá pouze jednosměrné zlepšující cesty (tedy nikdy nesnižuje tok po žádné hraně) zjevně nefunguje. Co když se ji ale pokusíme vylepšit a budeme vždy hledat *nejkratší* jednosměrné zlepšující cesty? Dokažte, že ani tato varianta nemusí najít maximální tok.
2. *Jednosměrný algoritmus s orákulem:* [5b]
Existuje vůbec nějaká posloupnost zlepšujících cest po směru hran, která vede k maximálnímu toku? Jinými slovy, kdybychom měli magické orákulum které nám vždy poradí tu nejvhodnější jednosměrnou zlepšující cestu, stačilo by nám to vždy k nalezení maximálního toku? Pokud ano, platí to i pro posloupnost nejkratších zlepšujících cest (tedy pro orákulum které by nám smělo napovídat pouze nejkratší zlepšující cesty)?
3. *Dinic s omezenými celými čísly:* [5b]
Dokažte, že pro celočíselné kapacity omezené konstantou Dinicův algoritmus doběhne v čase $\mathcal{O}(nm)$.
4. *Parlamentní kluby:* [5b]
V parlamentu s n poslanci je m různých klubů. Jeden poslanec může být členem mnoha různých klubů. Každý klub nyní potřebuje zvolit svého předsedu a tajemníka tak, aby všichni předsedové a tajemníci byli navzájem různé osoby (tedy aby nikdo „neseděl na více křeslech“). Navrhněte algoritmus, který zvolí všechny předsedy a tajemníky, případně oznámí, že řešení neexistuje. Mimochodem, za jakých podmínek je existence řešení garantována?